

➤ Corrigé Problème 12

Soit f la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{2x + 4}$.

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 6x - 7) = 4 + 12 - 7 = 9 ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} (2x + 4) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = -2$ est donc asymptote à C.

$$2. a) \text{ pour } x > -2, \quad f(x) = \frac{x}{2} - 4 + \frac{9}{2x + 4} = \frac{x(2x + 4) - 8(2x + 4) + 9}{2(2x + 4)} = \frac{x^2 + 2x - 8x - 16 + 9}{2x + 4} = \frac{x^2 - 6x - 7}{2x + 4}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 4) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2x + 4)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} - 4 = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 6x - 7}{2x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{6}{x} - \frac{7}{x^2} \right)}{x \left(2 + \frac{4}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$c) \left(f(x) - \left(\frac{x}{2} - 4 \right) \right) = \frac{9}{2x + 4} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{(2x + 4)} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{x}{2} - 4 \right) \right) = 0$$

La droite d'équation $y = \frac{x}{2} - 4$ est donc asymptote à C en $+\infty$.

$$3. a) f \text{ est dérivable sur }] -2 ; +\infty[\text{ car c'est une fonction rationnelle. } \quad f(x) = \frac{x}{2} - 4 + \frac{9}{2x + 4} ;$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{18}{(2x + 4)^2} = \frac{(2x + 4)^2 - 36}{2(2x + 4)^2} = \frac{(2x + 4 - 6)(2x + 4 + 6)}{2(2x + 4)^2} = \frac{(x - 1)(x + 5)}{2(x + 2)^2}$$

$$\text{or } (x + 5)(x - 1) = x^2 + 5x - x - 5 = x^2 + 4x - 5. \text{ Donc } f'(x) = \frac{(x + 5)(x - 1)}{2(x + 2)^2}.$$

b) sur $] -2 ; +\infty[$, le dénominateur est strictement positif,

et $(x + 5)(x - 1) > 0$ pour $x \in] -\infty ; -5[\cup] 1 ; +\infty[$; $(x + 5)(x - 1) < 0$ pour $x \in] -5 ; 1[$.

Donc $f'(x) > 0$ pour $x \in] 1 ; +\infty[$ et dans ce cas, f est croissante

et $f'(x) < 0$ pour $x \in] -2 ; 1[$ et dans ce cas, f est décroissante.

c) Tableau de variation de f :

x	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$$f(1) = \frac{1 - 6 - 7}{2 + 4} = \frac{-12}{6} = -2. \quad f \text{ admet donc un minimum en } 1 \text{ qui est } f(1) = -2.$$

$$4. a) \Delta = b^2 - 4ac \quad \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 36 + 28 = 64 ; \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$$

$$\text{Le trinôme a alors deux racines : } x_1 = \frac{6 - 8}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{6 + 8}{2} = 7$$

L'abscisse des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses vérifie $f(x) = 0$, c'est à dire $P(x) = 0$ avec $x > -2$. Ces abscisses sont alors -1 et 7 . Les coordonnées des points sont alors $(-1 ; 0)$ et $(7 ; 0)$.

b) A(-1 ; 0) et B(7 ; 0). Une équation de T_A est : $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$

$$f'(-1) = \frac{(-1 + 5)(-1 - 1)}{2(-1 + 2)^2} = -4 \quad \text{et} \quad f(-1) = 0 \quad y = -4(x + 1) ; \quad y = -4x - 4$$

$$\text{Une équation de } T_B \text{ est : } y = f'(7)(x - 7) + f(7) ; \quad f'(7) = \frac{(7 + 5)(7 - 1)}{2(7 + 2)^2} = \frac{4}{9} \quad y = \frac{4}{9}(x - 7)$$

soit $y = \frac{4}{7}x - 4$

