- ***<u>Corrigé Problème 14</u>***

1. $f(x)$ est définie si et seulement si son dénominateur $x-1\neq 0$, ce qui équivaut à $x\neq 1$.
   Ainsi $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
2. Partons du membre de droite de l'égalité proposée : pour tout $x\neq 1$, on a :

$$ax+b+\frac{c}{x-1}=\frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1}=\frac{ax^2(b-a)x+(-b+c)}{x-1}=\frac{-x^2+3x-6}{x-1}\text{, donc}$$

$$\begin{cases}a=-1\\ b-a=3\\ c-b=-6\end{cases}\Leftrightarrow a=-1;b=3+a=3+1=2;c=-6+2=-4.\quad f(x)=\frac{-x^2+3x-6}{x-1}=-x+2-\frac{4}{x-1},$$

3.a. En $-\infty$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x-1}=0$ par somme puis quotient de limites . De même , $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+2=+\infty$, il s'ensuit alors par somme de limites que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

b. En $+\infty$ (démarche identique)

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0$ par somme puis quotient de limites . De même , $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+2=-\infty$, il s'ensuit alors par somme de limites que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

c. En 1 : on a $f(x)=-x+2-\frac{4}{x-1}=-x+2-4\times\frac{1}{x-1}$ pour tout $x\neq 1$. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(-x+2)=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1)=0$.

Or , $x-1<0$ pour tout $x<1$, on en déduit alors par inverse de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{(x-1)}=-\infty$ .et

$-4\times\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{(x-1)}=+\infty$ On conclut par quotient et somme de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty$

De même , , $x-1>0$ pour tout $x>1$, on en déduit alors par inverse de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{(x-1)}=+\infty$ .et

$-4\times\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{1}{(x-1)}=-\infty$ On conclut par quotient et somme de limites que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$

b. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=+\infty$, on peut affirmer que la droite D d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe C_f .

4. a. pour tout $x\neq 1$, on a $f(x)-(-x+2)=-\frac{4}{x-1}$, or on vient de voir que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0$ .Par conséquent La courbe C_f admet la droite Δ d'équation $y=-x+2$ pour asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. pour tout $x\neq 1$, on a $f(x)-(-x+2)=\frac{4}{1-x}$ est de même signe que $1-x$, si bien que $f(x)>(-x+2)$ pour $x\in]-\infty;1[$ et que $f(x)<(-x+2)$ pour $x\in]1;+\infty[$.

On conclut que la courbe C_f est au dessus de D sur $]-\infty;1[$ et en dessous de D sur $]1;+\infty[$

5. Soit $I(x;y)=D\cap\Delta$; alors $x=1$ et $y=-x+2=-1+2=1$ .Par conséquent l'intersection des asymptotes Est le point $I(1;1)$.

Vérifions maintenant que ce point est un centre de symétrie de la courbe C_f .Comme $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ est symétrique par rapport à 1 il fat et il suffit que : $f(a+h)+f(a-h)=2b$, c'est-à-dire

$f(1+h)+f(1-h)=2\times 1=2$. En effet : pour tout $h\neq 0$

$$f(1+h)+f(1-h)=-(1+h)+2-\frac{4}{1+h-1}-(1-h)+2-\frac{4}{1-h-1}=1-h-\frac{4}{h}+1+h+\frac{4}{h}=2.\text{ Cqfd}$$

Le point d'intersection I est donc centre de symétrie de la courbe C_f .

6. a . La fonction f étant un polynômes, elle est dérivable sur son domaine de définition.

En utilisant la formule $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{1}{v^2}$ pour v une fonction dérivable ne s'annulant pas,

on obtient pour tout $x\neq 1$: $f'(x)=-1+\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{2^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{\left[2+(x-1)\right]\left[2-(x-1)\right]}{(x-1)^2}$

Soit pour tout $x\neq 1$ $f'(x)=\frac{(x+1)(3-x)}{(x-1)^2}$

b) Dressons le tableau de signe de f' sur D_f

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$+$	

c) On en déduit le tableau de variation de f sur D_f

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Ne pas oublier de placer les limites « aux bouts des flèches »

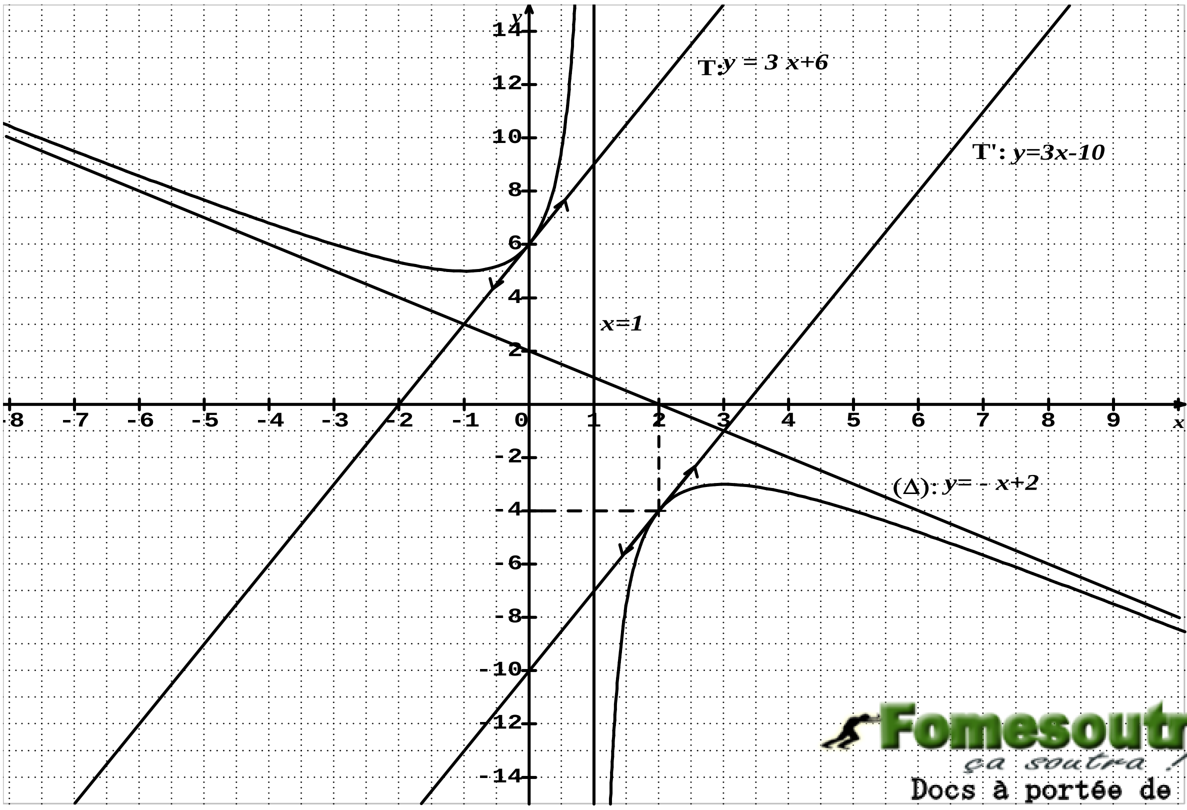
$f(-1)=-1+2-\frac{4}{-2}=5$ et $f(3)=-3+2-\frac{4}{2}=-3$

De plus , f' s'annule en -1 et en 3, si bien que la courbe C_f admet des tangentes horizontales Aux points $A(-1;5)$ et $B(3;-3)$. Elles doivent impérativement apparaître sur le tracé .

7. $f(0)=6$ et que $f'(0)=3$, alors la tangente T à la courbe C_f au point $C(0;6)$ a pour équation réduite $y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x+6$. De même on a : $f(2)=-2+2-\frac{4}{1}=-4$ et que $f'(2)=\frac{(2+1)(3-2)}{(2-1)^2}=3$, alors la tangente T à la courbe C_f au point $C(2;-4)$ a pour équation réduite

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=3(x-2)-4$. Soit $y=3x-10$

8. En plaçant les deux asymptotes et les trois tangentes rencontrées en cours d'étude, On peut alors tracer sans aucune difficulté la courbe C_f .


T: y = 3 x+6
T': y=3x-10
x=1
(Δ): y= - x+2
x
y