Problème 6

Partie A **-**1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation : $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

b. En déduire les solutions, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, de l'équation $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$.On pourra poser $X = \ln x$.

Partie B *:* Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2$. Soit C la courbe

représentative de la fonction *f* dans le plan muni du repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Etudier la limite de *f* en 0. Quelle conséquence graphique peut-on en tirer ?

b. Déterminer la limite de *f* en + ∞ (on pourra factoriser par ln *x*).

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Vérifier que, pour tout nombre réel *x* de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{4\ln x - 5}{x}$.

b. Etudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. En déduire le signe de *f*(*x*) sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.On pourra remarquer que la fonction *f* s'annule en $\sqrt{e}$ et en e^2.

3. Donner une équation de la tangente T et la courbe C au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

4. Tracer la courbe C et la tangente T dans le repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$

5. a. Hachurer le domaine A du plan situé en dessous de l'axe (O*x*) et compris entre la courbe C et l'axe (O*x*).

b. Vérifier que la fonction *F* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x(2(\ln x)^2 - 9\ln x + 11)$ est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Problème 7

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$. (ln *x* désigne le logarithme népérien de *x*)

1. Calculer *g'*(*x*) et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction *g.* (Les limites ne sont pas demandées). Calculer *g*(1).
3. Déduire des questions précédentes le signe de *g*(*x*) sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B : On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x^2}$. On appelle (*C*) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.(unités :3 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1.a Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

1.b Montrer que la droite (*D*) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (*C*). Y a-t-il une autre asymptote à (*C*) ? Si oui, donner son équation.

1.c Calculer *f '*(*x*) et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

1.d En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de *f '*(*x*), puis dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

1.e Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (*D*) et la courbe (*C*). Etudier la position de la courbe (*C*) par rapport à la droite (*D*).

1.f Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (*C*) et les droites (*D*).

Problème 8

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=a\ln x+bx+\frac{c}{x}$ où *a*, *b* et *c* sont trois nombres réels à déterminer. On note *f '* la fonction dérivée de la fonction *f* .

On a représenté la fonction *f* sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique
2 cm. On note C la courbe représentative de cette fonction *f* .
On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère.
La tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A : Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable *x* et des nombres réels *a*, *b* et *c*.
3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels *a*, *b* et *c*.
4. En utilisant les réponses aux questions 1.et 3., montrer que les nombres réels *a*, *b* et *c* sont solutions du système *S* suivant : $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$
5. Résoudre le système *S*. En déduire une expression de *f* (*x*).

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

Dans la suite du problème la fonction *f* est définie sur l'intervalle]0 ; ∞[par :
$f(x)=8\ln x-3x+\frac{4}{x}$

1. Déterminer par calculs la limite de *f* en +∞ (on peut factoriser *f* (*x*) par *x*).
2. On rappelle que : $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$. En écrivant *f* (*x*) sous la forme : $f(x)=\frac{1}{x}\left(8x\ln x-3x^2+4\right)$,
   Déterminer la limite de *f* en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel *x* de l'intervalle]0 ; ∞[:
$f'(x)=\frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$
   a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction *f* (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)
   b. Montrer que, sur l'intervalle [4 ; 5] l'équation $f(x)=0$ a une unique solution. notée α .
   c. Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-2} suivant : $4,07<\alpha<4,08$.

Partie C : calcul d'une aire

1. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\frac{3}{2}x^2$.
   Calculer $F'(x)$ et en déduire une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$.
2. a. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équation *x* = 1 et *x* =3.
   b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan hachurée ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée a 10^{-2} près.

Problème 9

A) Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-\ln x-1$

1) Calculer les limites aux bornes de g en 0 et en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$

3) Etudier les variations de g et dresser don tableau de variation

4)a)Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions sur $]0;+\infty[$

On désigne par α la plus petite des deux solutions.

b) Démontrer que 0,4 < α <0,5

c) Calculer $g'(1)$

d) En déduire que pour tout nombre réel x strictement positif :

$si x\in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[$ alors $g(x)>0$ $si x\in]\alpha;1[$ alors $g(x)>0$

B) Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$ On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. (O,I,J).

Unité graphique : 4cm sur (OI) et 2cm 0,5 sur (OJ)

1)a)Déterminer la limite de f en 0.Donner une interprétation graphique du résultat

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout nombre réel x strictement positif, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

3)a)Démontrer que $f(\alpha)=2\alpha+\frac{1}{\alpha}$

4) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est asymptote à (C_f)

5) Etudier la position relative de (Δ) par rapport (C_f)

6) Tracer (Δ) et (C_f) .On prendra et $\alpha=0,45$ et $f(\alpha)=3,1$

7) Soit (A) l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C_f), (Δ) et les droites d'équations respectives $x=e^2$ et $x=1$ .Calculer (A)

Problème 10

Soit f est la fonction définie, sur [0 ;e[$\cup$]e ;+ ∞[, par : $\begin{cases} f(x)=\frac{2\ln x+1}{\ln x-1} & pour x\in]0;e[\cup]e;+\infty[\\ f(0)=2 \end{cases}$.

1)a)Montrer que f est continue en 0 puis

b) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)=2$

2) Etudier le signe de $(\ln x-1)$ et en déduire les limites à gauche et à droite de f en e .

3) Etudier la dérivabilité de f en o et dresser son tableau de variation

4) Résoudre dans **R** l'équation : $f(x)=0$.

5) Représenter f dans un repère orthogonal. On précisera la position relative de la courbe représentative de f et de la droite Δ d'équation y = 2 .

6) justifier que e^{-1} est un point d'inflexion de C_f