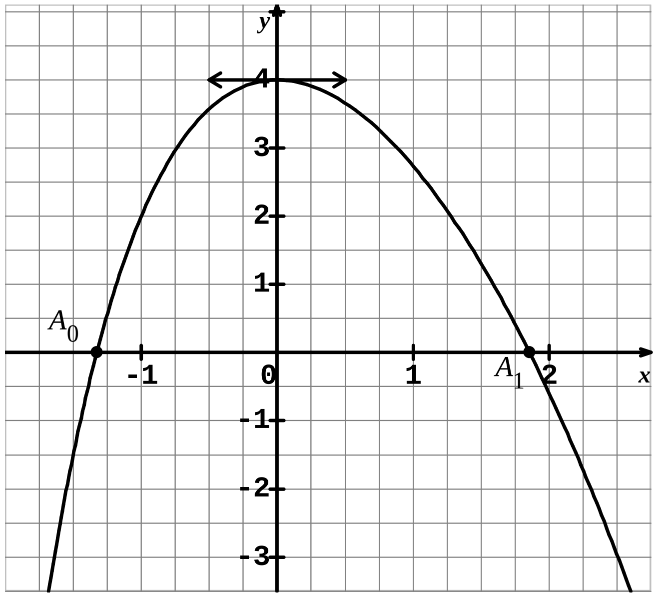
Problème 26

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 2 cm. La représentation graphique C_f d'une fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ainsi qu'une droite T sont tracées dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan ci-dessous. La courbe C_f passe par les points de coordonnées $(-1;2)$ et (0 ; 4). La droite T, parallèle à l'axe des abscisses, est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

Partie A : étude graphique



1. Donner les valeurs des nombres réels $f(0)$ et $f(-1)$.
2. Sachant que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points A_0 et A_1 d'abscisses respectives x_0 et x_1 avec $x_0 < x_1$, préciser à l'aide du graphique le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Déterminer graphiquement $f'(0)$.
   b) Déterminer par lecture graphique le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-1;2]$.
4. On admet qu'il existe deux constantes réelles *a* et *b* telles que, pour tout nombre réel x, on ait :
   $f(x) = (x+a)e^{-x} + bx^2 + 3$.
   En utilisant les résultats de la question **1.**, déterminer les nombres réels *a* et *b*.

Partie B : Etude de la fonction f sans utilisation graphique

On admet maintenant que la fonction f est définie sur R par : $f(x) = (x+1)e^{-x} - x^2 + 3$

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
2. En remarquant que $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - x^2 + 3$, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. a) Montrer que pour tout nombre réel, $f'(x) = -x(e^{-x} + 2)$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f.
4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;2]$.
   Cette solution est l'abscisse x_1 du point A_1 définie dans la partie A question 2.
   b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du réel x_1.

Partie C : Calcul d'une aire

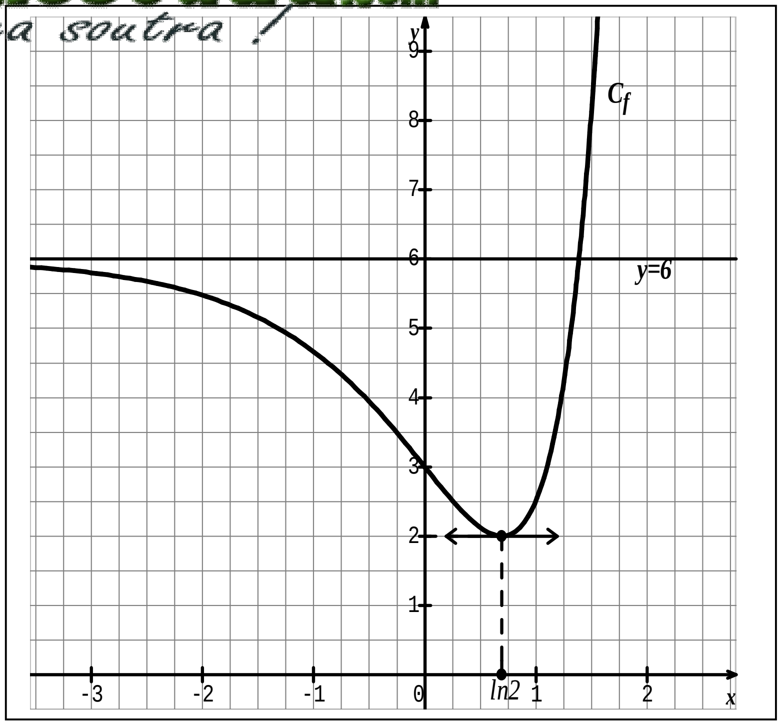
1. a) On considère les fonctions g et G définies sur **R** par $g(x)=(x+1)e^{-x}$ et $G(x)=(-x-2)e^{-x}$.

Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur **R**.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur **R**.

2. On désigne par P la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$. On appelle A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie P.

Calculer la valeur exacte de A, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.



Problème 27

Partie A - Etude de la représentation graphique d'une fonction f

On donne, ci-dessous, la représentation graphique C d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble **R**.

des nombres réels. Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unités graphiques 1,5 cm en abscisse et 1 cm
en ordonnée.

La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse ln 2. La droite d'équation y = 6 est asymptote
horizontale à la courbe C_f en $-\infty$ .La courbe C_f admet une tangente de coefficient directeur -2 au point $A(0;3)$.

Par lecture graphique et en utilisant les informations ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs $f(\ln 2)$ et $f(0)$?
2. Déterminer, en le justifiant, $f'(\ln 2)$ et $f'(0)$.
3. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

Partie B **-** On admettra maintenant que f est la fonction définie sur R par : $f(x)=e^{2x}-4e^{x}+6$ et on se propose dans cette partie de retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement dans la partie A.

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x)=(e^{x}-2)^{2}+2$. Calculer $f(\ln 2)$.

2. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Quelle propriété de la courbe C_f présentée dans la **partie A**, est ainsi confirmée ?

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en utilisant l'expression de $f(x)$ donnée en **B.1.**

4. a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-2)$

b) Résoudre sur R l'équation $f'(x)=0$.

c) Résoudre sur R l'équation $f'(x) > 0$.

d) En déduire sur R, le tableau de signe de $f'(x)$, puis les variations de la fonction f. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ et les limites trouvées en **B.3.a)** et **B.4.**.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution α sur R. Donner, en le justifiant un encadrement de α à 10^{-1} près.

Partie C - Calcul d'une aire

1. Montrer que la fonction F définie sur **R** par : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x + 6x$ est une primitive de la fonction f sur **R**.

2. Hachurer sur la figure la partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites
d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3. Soit A l'aire en cm² de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de A, puis en donner une valeur arrondie au centième.

Problème 28

On considère la fonction f, définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités : 2 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

Partie A : Limites aux bornes de l'ensemble de définition

1. Montrer que la droite D d'équation $y = 4$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

2. a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = (e^x - 1)(e^x - 4)$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Partie B : Intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses

En utilisant la forme factorisée de $f(x)$ donnée dans la partie **A. 2. a)**, déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

Partie C : Etude des variations de la fonction f

1. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Montrer en détaillant vos calculs, que. $f\left(\ln\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variations complet de la fonction f.

4. A l'aide du tableau de variations et du résultat acquis à la partie **B**, donner le tableau de signes $f(x)$ sur **R**.

5. Tracer la droite D puis la courbe C_f, pour x appartenant à l'intervalle $[-4\,;2]$, dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie D : calcul d'une aire

1. Déterminer une primitive F de f sur **R**.

2. a) Déterminer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 4$. Donner une valeur approchée au mm² près de cette aire.

Problème 29

Partie I : Etude de la fonction f.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(2x^2-5x+2)e^x$. On note C_f la courbe représentative

de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$ (on donne $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^x=0$).

En déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera l'équation.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=(2x^2-x-3)e^x$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Donner le tableau des variations de la fonction f (préciser la valeur exacte de chaque extremum).

3. a) Montrer que l'équation $f(x)=2$ possède une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 3].

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre α.

4. Tracer la courbe C_f et placer son point A d'abscisse α.

***Partie II*:** On désigne par F la fonction définie sur **R** par $F(x)=\left(2x^2-9x+11\right)e^x$.

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur **R**.

2. Calculer l'intégrale $I=\int_{0,5}^{2} f(x)dx$. Donner une interprétation graphique de cette intégrale.

Problème 30

On considère la courbe C_f représentant la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(1+x)^2e^{-x}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b) Montrer que si x est différent de zéro on a : $f(x)=x^2e^{-x}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a) Montrer que $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur **R**

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

4. Etude de la position C_f par rapport à T.

a) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x)-(x+1)=(x+1)e^{-x}\times g(x)$ avec $g(x)=x+1-e^x$

b) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

c) En déduire le signe de $g(x)$, puis de $f(x)-(x+1)$. En déduire la position de C_f par rapport à T.

5. Après avoir complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer T et C_f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-2} près.

x	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4	6
$f(x)$										

Partie B

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=\left(-x^2-4x-5\right)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .

2. Calculer l'aire en cm² de la région du plan comprise entre les axes de coordonnées, la courbe C_f et la droite d'équation $x=3$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Problème 8(Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.)

Partie A : ln désigne la fonction logarithme népérien. On note E le point de coordonnées (ln 2 ; ln 2).

Soient a et b deux nombres réels, on désigne par *g* la fonction définie sur **R** par :

$g(x)=ax+b-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$.

1. Calculer la dérivée de *g*.
2. Déterminer *a* et *b* pour que la courbe représentative de *g* passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B : On se propose d'étudier la fonction numérique f définie sur **R** par : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+2}$

.Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que pour tout nombre réel x on a : $f(x)=x-2+\dfrac{8}{e^x+2}$.
2. En utilisant des formes de $f(x)$, calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que les droites D_1 d'équation $y=x-2$ et D_2 d'équation $y=x+2$ sont asymptotes à la courbe C_f.
4. Montrer que la dérivée de f est $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-2}{e^x+2}\right)^2$.
5. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f .
6. Construire la courbe C_f , sa tangente en E et ses asymptotes.

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur R par $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$. En déduire une primitive de f .
2. Déterminer en cm², en valeur exacte puis au mm² près, l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe
   C_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=2$.