Problème 31

Le plan P est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (L'unité graphique est 5 cm.).Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan P .

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x(x-2)-1$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étude des variations de g
   a) Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Résolution de l'équation $g(x)=0$

a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ possède une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle$\left[1;3\right]$.

   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   c) vérifier que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-2}$ (on pourra utiliser $g(\alpha)=0$)

4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$.

II - Étude de la fonction f

1. Étude de la limite en $+\infty$.
   a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}$
   b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite D d'équation $y=1$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Étude des variations de f
   a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+x)^2}$ où g est la fonction définie en 1.
   b) Déduire de la question I.4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   c) Calculer $f(\alpha)$ en fonction de α et montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha-1}$.
4. Construire la courbe C et la droite D dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

III - Calcul d'aire

On note B l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limitée par la courbe C , la droite D , l'axe des ordonnées
et la droite d'équation x = 1.

1. Hachurer sur le graphique le domaine B.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [0 ; +∞[.
3. En déduire la valeur exacte de B, puis une valeur approchée arrondie au mm^2.

Problème 32

Soit la fonction définie par $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;0[,\ f(x) = e^{\frac{1+x}{x}} \\ \forall x \in,]0;+\infty[\ f(x) = \dfrac{-x}{2} + 3 + \dfrac{2\ln x - 1}{x} \end{cases}$

Partie 1

1) Soit g la fonction définie sur R^* par $g(x) = e.e^{\frac{1}{x}}$

a)Etudier la variation de g

b) Donner le signe de g sur R^*

2) Soit h la fonction définie sur R^* par $h(x) = -x^2 + 6 - 4\ln x$

a)Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$ et interpréter si possible le résultat

b) Etudier les variations de h sur $]0;+\infty[$

3-a)Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique β et que $1,86 \leq \beta \leq 1,87$

b) Déterminer le signe de h $]0;+\infty[$

c) Calculer $h(e)$ puis $(h^{-1})'(-e^2+2)$.Dresser le tableau de variation de (h^{-1}) sans l'avoir étudié puis en déduire son signe.

Partie 2

Soit f la fonction définie plus haut et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J).

1-a)Montrer que $\forall x \in]-\infty;0[,\ f(x) = g(x)$

b) Déterminer les limites de f à droite en 0 et $+\infty$ en puis donner une interprétation des résultats

2-a)Calculer la dérivée f' de f et montrer que $\forall x \in]-\infty;0[,\ f'(x)$ et $h(x)$ ont le même signe.

b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f

3) Montrer que $f(\beta) = -\beta + \dfrac{2}{\beta} + 3$ et en déduire un encadrement de $f(\beta)$

4-a)Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{-1}{2}x + 3$ est asymptote à (C_f)

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (Δ) et de (C_f)

c) Etudier la position de (Δ) par rapport à (C_f) sur $]0;+\infty[$

5) Déterminer les coordonnées du point B de la courbe (C_f) où la tangente (T) à (C_f) est parallèle à la droite (Δ)

6) Construire (C_f) les droites (T) et (Δ) dans le repère (O,I,J).

7) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation, $x = \sqrt{e}$ et $x = e$, la courbe (C_f) et l'asymptote (Δ)

Problème 33

Partie A

On considère la fonction numérique f définie par : $\forall x \in R,\ f\left(x\right)=e^{-2x}+ae^{-x}+b$ où a et b sont des réels.

On appelle (C_f) e la courbe représentative de f dans le plan $\left(P\right)$ muni du repère orthogonal (O,I,J)

Déterminer a et b pour la courbe (C_f) passe par le point A de coordonnées $\left(-\ln 3;1\right)$ et possède en ce point une tangente de coefficient directeur -6.

Partie B

Soit la fonction numérique f définie sur R par : $f\left(x\right)=\left(e^{-x}-2\right)^2$ et (C_f) le tracé représentatif dans le plan $\left(P\right)$

1-a)Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale$\left(\Delta\right)$ que l'on précisera

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection B de la courbe (C_f) et de la droite $\left(\Delta\right)$

2) Soit f' la dérivée de f sur R

-Etablir que $f\left(x\right)=-2e^{-x}\left(e^{-x}-2\right)$ et détermine son signe.

-Etablir le tableau de variation de la fonction f.

3) Calculer les coordonnées de E, point d'intersection de la courbe (C_f) et de l'axe des ordonnées.

-Déterminer une équation de la tangente $\left(T\right)$ à la courbe (C_f) en ce point tout en précisant la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente $\left(T\right)$.

4) Tracer dans le plan $\left(P\right)$ les droites $\left(\Delta\right)$ et $\left(T\right)$ ainsi que la courbe (C_f).

5) Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation, $x=-1$ et $x=1$, la courbe (C_f) et l'axe des abscisses

Problème 34

Le plan p est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\ \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

On s'intéresse dans ce problème a la fonction f définie sur l'ensemble R des nombres réels par $f(x)=\dfrac{3}{e^{3x}+1}$.On note C la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\ \vec{j})$.

Partie A : Etude de la fonction f

1. a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers ∞.

   b) En déduire que la courbe C admet un asymptote que l'on précisera.

c) Déterminer le signe de $f\left(x\right)$ pour tout nombre réel x; qu'en déduit-on sur la position de la courbe C par rapport a cette asymptote ?

2. On considère la droite D d'équation $y=3$

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

En Déduire que courbe C admet la droite D comme asymptote.

Montrer que, pour tout nombre réels $x, f'(x) = 3 - \frac{-9e^{3x}}{e^{3x}+1}$

En déduire la position la position relative de la courbe C et de la droite D.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-9e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur R, puis dresser son tableau de variation.

4) Dans le plan P muni du repère $(O;\vec{i},\ \vec{j})$ tracer les droites (D) et (Δ) ainsi que la courbe (C).

PARTIE B : Calcul de l'aire d'une partie du plan

a) On considère la fonction g définie sur R par g (x) = $\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$

Déterminer une primitive G, de la fonction g su R. *(On pourra remarquer que la fonction g sur R de la forme $\frac{u^1}{u}$ est une fonction que l'on précisera).*

b) En utilisant la question 2.c, de la partie A, déterminer une primitive F de la fonction f sur R.

2. Soit a un réel strictement positif. On note A(a) la mesure, exprimé en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan F comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses; et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$

a) Exprimer $A(a)$ à l'aide d'une intégrale.

b) Etablir que $A(a) = 3a - \ln(e^{3a}+1) + \ln 2$

c) En remarquant que $3a = \ln(e^{3a})$), écrire $A(a)$ sous la forme du logarithme népérien d'un quotient déterminer alors 1a limite de $A(a)$, lorsque a tend vers + ∞.

Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur fa copie sera prise en compte dans l'évaluation.

Problème 34

Partie A

On considère la fonction de R vers R définie par : $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

1-Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition

2- a) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation

b) Calculer $f(-1)$ puis en déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Démontrer que le point $\Omega(1;-1)$ est un centre de symétrie de (C) où (C) est la courbe de f dans le repère orthonormé (O, I, J) unité : 1cm

3) Construire la courbe (C)

Partie B

Soit g la fonction définie de R vers R par : $g(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

1)a) Donner l'ensemble de définition D_g de g

b) Vérifier que $g(x) = f(e^x), \forall x \in D_g$

c) En utilisant la question 2)b de la partie A, donner le signe de $g(x)$suivants les valeurs de g

2) Déterminer les limites de $g(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier $g(x)$ puis dresser le tableau de variation

c) Vérifier le résultat du signe de $g(x)$ trouvé au 1) avec le tableau de variation

3) Tracer la courbe (C_g) de dans le même repère (O,I,J)

Partie C

On pose $h(x)=1+\dfrac{2e^x}{1-e^x}$

1) Vérifie que $h(x)=g(x)$

2) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (C_g), l'axe (OI) et les droites respectives $x=-\ln 4, x=-\ln 2$

Problème 35

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative (C_f) est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de *f* en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à (C_f) .

c. Étudier la position relative de *C* et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

b. En déduire que, pour tout réel *x* strictement positif, $f'(x) > 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de *f* .

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ *et* $x=3$.

4. a. Déterminer le point *A* de (C_f) où la tangente à *C* est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point *A* à la droite Δ.