Problème 36

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de *g*.
2. Justifier que pour tout *x*, $e^x-x>0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et $-\infty$.
b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. a. Calculer $f'(x)$, *f'* désignant la fonction dérivée de *f*.
b. Etudier le sens de variation de *f* puis dresser son tableau de variation.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0.
b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C_f).

On considère la fonction *f* définie sur R par . On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Problème 37

Partie A

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2}$ et $g(x)=x^2e^{-x^2}$.

On note respectivement (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de *f* et *g* dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier (C_f) et (C_g) sur la figure fournie (justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions *f* et *g*.
3. Étudier le sens de variation de *f* et de *g* . Étudier les limites éventuelles de *f* et de *g* en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de (C_f) et (C_g).

Partie B

On considère la fonction *G* définie sur R par $G(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt$.

1. Que représente *G* pour la fonction *g* ?
2. Donner, pour *x* > 0, une interprétation de *G*(*x*) en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de *G* sur R.

On définit la fonction *F* sur $\mathbb{R}$ par : pour tout réel *x*, $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

4. Démontrer, que, pour tout réel *x*, $G(x)=\dfrac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de *G* et de $x\to\dfrac{1}{2}\left[F(x)-xe^{-x^2}\right]$.

On admet que la fonction *F* admet une limite finie *l* en $+\infty$, et que cette limite *l* est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe C_f et les demi-droites $[O;\vec{i})$ et $[O;\vec{j})$.

5. a. Démontrer que la fonction *G* admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel $N=\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-t^2}dt$.

c. En admettant que la limite de *G* en $+\infty$ représente l'aire *P* en unités d'aire du domaine *D* limité par la demi-droite $[O;\vec{i})$ et la courbe C_g justifier graphiquement que $N=\int_0^1\left(1-t^2\right)e^{-t^2}dt\geq\frac{l}{2}$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie).

Problème 38

Partie A

Soit g, la fonction définie sur R par : $g(x)=-1+(1-x)e^x$

1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.Etudier les limites de g sur R

a) Etudier les variations de g sur D_f

b) A l'aide du tableau de variation de g déterminer le signe de g(x)

Partie B

Soit f la fonction de R vers R définie par : $f(x)=-x-1+(-x+2)e^x$.Soit (C)dans la courbe de f muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2cm)

Pour tout $x\neq0$, on pose $h(x)=x\left[\left(-1-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{-x+2}{x}\right)e^x\right]$

a- Vérifier que pour tout $x\neq0$, $h(x)=f(x)$

b- Calculer les limites de f, en $-\infty$ et en $+\infty$

c- Vérifier que pour tout x de R, $f'(x)=g(x)$

d- Dresser le tableau de variation de f

2) Soit (Δ), la droite d'équation $y=-x-1$

a) Montrer que (Δ) est asymptote à (C) en $-\infty$.

b) Etudier la position de (C)par rapport à (Δ) dans tout le plan.

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_A=0$

d) Construire(Δ) ,(T) et (C)

Partie C

1) Montrer que dans l'intervalle $]1;2[$, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dont on donnera une valeur approchée à 10 près.

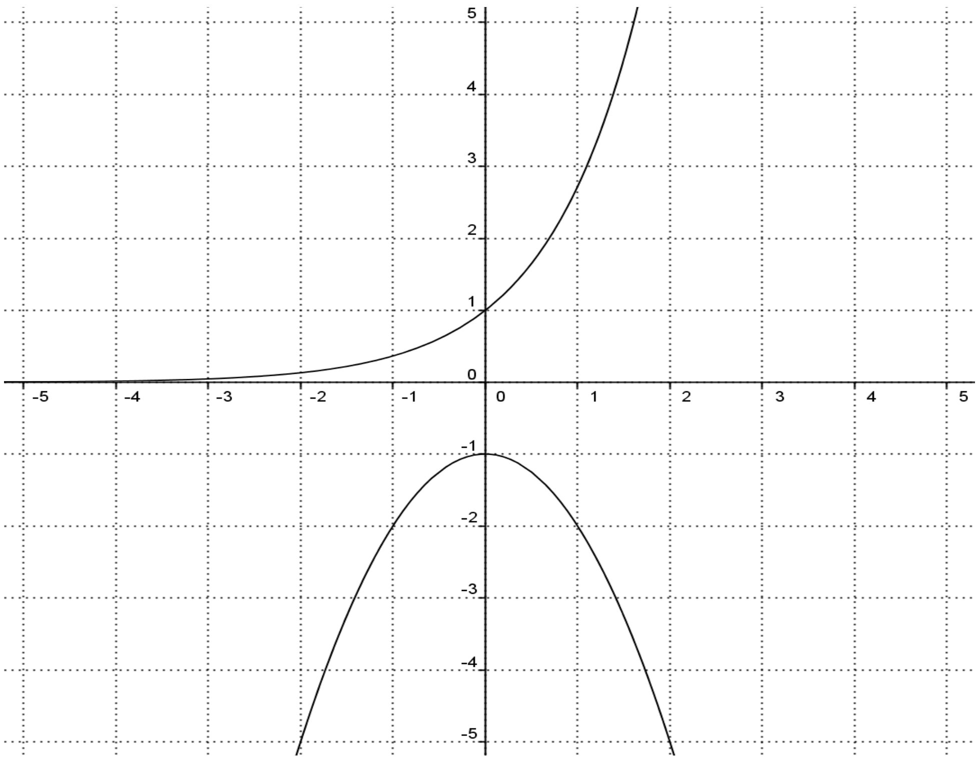
2) Soit t, un réel strictement inférieur à α et soit $S(t)$, l'aire de la portion du plan comprise entre (C), (Δ)et les droites d'équations respectives $x=t$ et $x=2$

a) en utilisant la technique d'intégration par parties, calculer $S(t)$ en cm^2

b) Calculer en cm^2, la limite de $S(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$

Problème 39

On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y=e^x$ et $y=-x^2-1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente T commune à ces deux courbes.



1. Sur le graphique ci-dessous, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2).

2. On désigne par *a* et *b* deux réels quelconques, par *A* le point d'abscisse *a* de la courbe (C_1) et par *B* le point d'abscisse *b* de la courbe (C_2).

a. Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point *A*.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point *B*.

c. En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels *a* et *b* sont solutions du système (S) : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}$.

d. Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') : $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}$.

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation $(E): e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4 = 0$.

Pour cela, on considère la fonction *f* définie sur R par : $f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4$.

a. Montrer que pour tout *x* appartenant à $]-\infty;0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$.

b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty;0[$.

c. Démontrer que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

d. Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[0;+\infty[$. On note *a* cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.

4. On prend pour *A* le point d'abscisse *a*. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel *b* pour lequel les droites (T_A) et (T_A) sont confondues.

Problème 40

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x)=\left(x^2-5x+7\right)e^x$.

1. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

b. On rappelle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ pour tout *n* entier naturel.

En remarquant que $f(x)=x^2e^x-5xe^x+7e^x$, déterminer la limite de *f* en $-\infty$. En déduire que C admet une asymptote dont on donnera une équation.

2. a. Démontrer que pour tout *x* de ℝ on a : $f'(x)=\left(x^2-3x+2\right)e^x$.

b. Déterminer le signe de *f* '(*x*) puis les variations de *f*.

Dresser le tableau de variations de *f* (on donnera les valeurs exactes de *f*(1) et de *f*(2)).

3. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Que peut-on dire de la tangente à C au point d'abscisse 1 ? Et au point d'abscisse 2 ?

4. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

x	−2	−1	0	1	2	2,5
$f(x)$						

On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près par défaut.

5. Construire la droite T et la courbe C.

Partie B

1. a. Hachurer sur le dessin la partie du plan comprise entre la courbe C, la droite d'équation *x* = 1 et les deux axes du repère. On appelle *A* son aire, en cm².

b. En utilisant la partie A. montrer que pour tout *x* de l'intervalle [0 ; 1] on a : $7\le f(x)\le 3e$.

c. En déduire l'encadrement suivant : $7\le\int_0^1 f(x)\,dx\le 3e$.

d. En utilisant l'encadrement ci-dessus justifier que l'aire *A* est comprise entre 28 et 33 cm².

2. a. Soit *g* la fonction définie sur ℝ par : $g(x)=\left(x^2-7x+14\right)e^x$.

Montrer que *g* est une primitive de *f* sur ℝ .

b. En déduire la valeur exacte de *A* puis la valeur arrondie à l'unité près.