Corrigé sujet 3

1. Résolution de (1): $z^2 - 10z + 50 = 0$.

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4\times1\times50 = 100 - 200 = -100 < 0$ et $\Delta = 100i^2$ donc $\sqrt{\Delta} = 10i$

l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{10-10i}{2} = 5 - 5i$ De même : $z_2 = \overline{z}_1 = 5 + 5i$

Ensemble des solutions : $S = \{5-5i; 5+5i\}$.

Résolution de (2): $z + 2 = i\sqrt{3}\, z - 6$

$$z+2 = i\sqrt{3}\,z - 6 \Leftrightarrow (1-i\sqrt{3})z = -6-2 \Leftrightarrow (1-i\sqrt{3})z = -8 \Leftrightarrow z = \frac{-8}{1-i\sqrt{3}} \Leftrightarrow z = \frac{-8\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow z = \frac{-8+8i\sqrt{3}}{1+3}$$

$$\Leftrightarrow z = -2 + 2\sqrt{3}i$$

2. Module et argument de $z_A = 5 - 5i$; z_A s'écrit sous la forme $z_A = a + bi$, donc on a :

$|z_A| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Soit θ_A un argument de z_A ; θ_A est tel que $\begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{a}{|z_A|} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{b}{|z_A|} = -\dfrac{5}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$: donc $\theta_A = -\frac{\pi}{4}$

La forme exponentielle est donc : $z_A = 5\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

2.b Forme exponentielle de z_B . Soit θ_B un argument de $z_B = \overline{z}_A$, donc $|z_B| = |\overline{z}_A| = |z_A| = 5\sqrt{2}$.

donc $\arg z_B = \arg \overline{z}_A = -\arg z_A = -(-\pi/4) = \pi/4 + 2k\pi$ et $z_B = 5\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$\frac{z_B}{z_A} = \frac{5\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{5\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/4 + i\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$. On a donc : $z_B = iz_A = z_A e^{i\pi/2}$. Donc B est l'image de A par
la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. De plus, on a OA = OB, donc le triangle OAB est rectangle
isocèle en O de centre O et d'angle $\pi/2$.

3. **.** Soit C le point d'affixe $z_C = -2 - 2i\sqrt{3}$. l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$ est le point D, d'affixe

$z_D = \left(-2-2i\sqrt{3}\right)\times e^{-i\pi/2} = \left(-2-2i\sqrt{3}\right)\times(-i) = +2i + 2i^2\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 2i$ donc

$z_D = -2\sqrt{3} + 2i$. $OC = |z_C| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$.

De même $OD=|z_D|=|iz_C|=|i|\times|z_C|=|z_C|=4$. Donc les points C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 4, puis on utilise une de leurs coordonnées qui est entière pour les placer avec précision.

4. Affixe du point K, milieu de [AC] : $z_K=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{5-5i-2-2i\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\left(5+2\sqrt{3}\right)i}{2}$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{OK}$: $z_{\overrightarrow{OK}}=z_K-0=\frac{3-\left(5+2\sqrt{3}\right)i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)}{2}i$

Donc le vecteur $\overrightarrow{OK}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{OK}\left(\frac{3}{2};-\frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)}{2}\right)$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{DB}$: $z_{\overrightarrow{DB}}=z_B-z_D=5+5i-(-2\sqrt{3}+2i)=5+2\sqrt{3}+3i$

Donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{DB}\left(5+2\sqrt{3};3\right)$

Calcul du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{DB}$:

$\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DB}=\frac{3}{2}\times\left(5+2\sqrt{3}\right)-3\times\frac{5+2\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2}+3\sqrt{3}-\frac{15}{2}-3\sqrt{3}=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux donc les droites (DB) et (OK) sont perpendiculaires.