**CORRIGE SUJET 10**

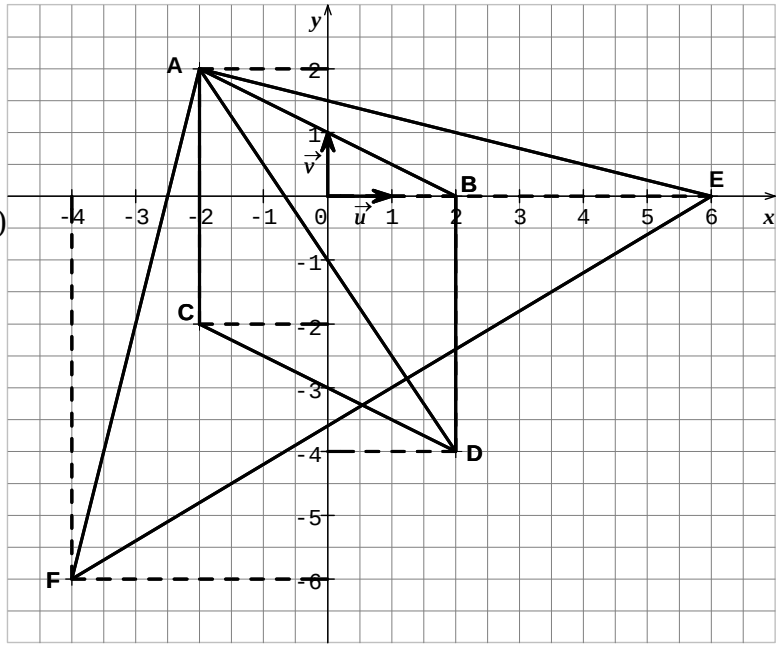
***Partie A :***

$(E): 2^3 + 2\times 2^2 - 16 = 8+8-16 = 0$. Donc 2 est une solution de ( E).

$(E): z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(az^2 + bz + c)$

$= az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 + 2a = 4 \\ c = 2b = 8 \\ c = 8 \end{cases}$$




$(E): z^3 + 2z^2 - 16 = (z-2)(z^2 + 4z + 8)$

$(E): z^3 + 2z^2 - 16 = 0$

$(z-2)(z^2 + 4z + 8) = 0$

$z - 2 = 0$ *ou* $z^2 + 4z + 8 = 0$

$z = 2$ *ou* $z^2 + 4z + 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4\times 1\times 8 = 16 - 32 = -16$

$\Delta = 16i^2$ ; $\sqrt{\Delta} = 4i$

$$z_2 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i \quad ;$$

$$z_2 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i \quad . \qquad S = \{2 ; -2+2i ; -2-2i\} .$$

$z_1 = 2e^{i2k\pi} = 2(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$ ; comme $z_3 = \overline{z_1}$, on a :

$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = |z_3|$

$\cos\theta_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , donc $\theta_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ .

$\cos\theta_3 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_3 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , donc $\theta_3 = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $\theta_3 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ .

B) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 - (-2+2i) = 4 - 2i$ $\qquad z_{\overrightarrow{CD}} = z_D - z_C = z_D - (-2-2i) = z_D + 2 + 2i$

Donc $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{CD}}$ équivaut $4 - 2i = z_D + 2 + 2i$ , donc $4 - 2i - 2 - 2i = z_D$ , donc $z_D = 2 - 4i$

3°) $z_E = i\times z_D + z_B \times (1-i) = i(2-4i) + 2(1-i) = 2i - 4i^2 + 2 - 2i = 4 + 2 = 6$

$z_F = -i\times z_D + z_C \times (1+i) = -i(2-4i) + (-2-2i)(1+i) = -2i + 4i^2 - 2 - 2i - 2i - 2i^2$

$z_F = -2i + 4i^2 - 2 - 2i - 2i - 2i^2 = -6i - 4 - 2 + 2 = -4 - 6i$ . $z_F = -4 - 6i$

$z_{\overrightarrow{AF}} = z_F - z_A = -4 - 6i - (-2 + 2i) = -4 - 6i + 2 - 2i = -2 - 8i$ .

$AF = \left|z_{\overrightarrow{AF}}\right| = \left|z_F - z_A\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2} = = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$z_{\overrightarrow{AE}} = z_E - z_A = 6 - (-2 + 2i) = 6 + 2 - 2i = 8 - 2i$ .

$\mathrm{AE} = \left|z_{\overrightarrow{\mathrm{AE}}}\right| = \left|z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{A}}\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = -4 - 6i - 6 = -10 - 6i$ . $EE = \left|z_{\overrightarrow{EF}}\right| = \left|z_F - z_E\right| = \sqrt{(-10)^2 + (-6)^2} = = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{AE}^2 + \mathrm{AF}^2 = 68 + 68 = 136 \\ \mathrm{EF}^2 = 136 \end{array}\right\}$ donc $\mathrm{EF}^2 = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{AF}^2$

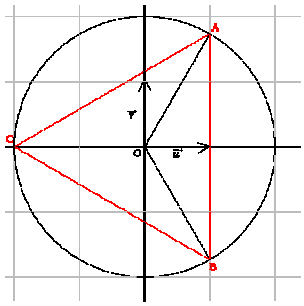
d'après la réciproque du théorème de Pythagore AEF est rectangle en A.

Comme AE = AF , le triangle AEF est aussi isocèle.

## CORRIGE SUJET 11

**1.** $z^2 - 2z + 4 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 = 12i^2$

$z_1 = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_1 = \dfrac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$



**2. a)** $z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad \left|z_A\right| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2 \quad \begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\theta_A = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

$z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad \left|z_B\right| = \left|\overline{z_A}\right| = \left|z_A\right| = 2$ et $\arg z_B = \arg \overline{z_A} = -\arg z_A = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

b) $z_A$ a pour module 2 et un argument est $\pi / 3$ donc : $z_A = 2e^{i\pi/3}$

c) Voir figure

3. On désigne par *R* la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre

le point M' d'affixe z' tel que : $z' = e^{2i\pi/3} z$

a) *R* est une rotation de centre O et d'angle de mesure $2\pi / 3$ .

b) $z_C = e^{2i\pi/3} z_A = 2e^{2i\pi/3} e^{i\pi/3} = 2e^{i\pi} = -2$

c. Voir figure

**d)** $e^{2i\pi/3} z_C = 2e^{2i\pi/3} e^{i\pi} = 2e^{5i\pi/3} = 2e^{-i\pi/3} = z_B$ donc B est l'image de C par la rotation *R*.

Montrons que ABC est un triangle équilatéral :

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1 - i\sqrt{3} - (1 + i\sqrt{3} = -2i\sqrt{3}$ et $AB = 2\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -2 - (1 - i\sqrt{3}) = -3 + i\sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -2 - (1 + i\sqrt{3}) = -3 - i\sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

AB = AC = BC donc le triangle ABC est un triangle équilatéral

## CORRIGE SUJET 12

1. a. $z_1^{\,3} = (1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = (1+2i+i^2)(1+i) = 2i(1+i) = 2i+2i^2 = -2+2i$

b. $z_3 = z_1^{\,3} z_2 = (-2+2i)(\sqrt{3}+i) = -2\sqrt{3}-2i+2i\sqrt{3}+2i^2 = (-2\sqrt{3}-2)+i(2\sqrt{3}-2)$

2. a. $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_1^{\,3} = \sqrt{2}^3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{i\theta}$

b. $|z_1^{\,3}| = 2\sqrt{2}$ $\arg(z_1^3) = \dfrac{3\pi}{4}$. $|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1} = \sqrt{4} = 2$ $\left.\begin{array}{l}\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$ $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

c.

$$z_3 = z_1^{\,3} z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{9\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = 4\sqrt{2}\left[\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right]$$

3. $z_3 = 4\sqrt{2}\left[\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right] = (-2\sqrt{3}-2)+i(2\sqrt{3}-2)$

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8} = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad et \quad \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

## CORRIGE SUJET 13

1° $z^2-4z+6=0$

$\Delta = b^2-4ac = (4)^2-4\times1\times6 = 16-24 = -8$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-8} = \sqrt{8i^2} = 2\sqrt{2}i$

$z_1 = \dfrac{4-2\sqrt{2}i}{2} = 2-\sqrt{2}i$

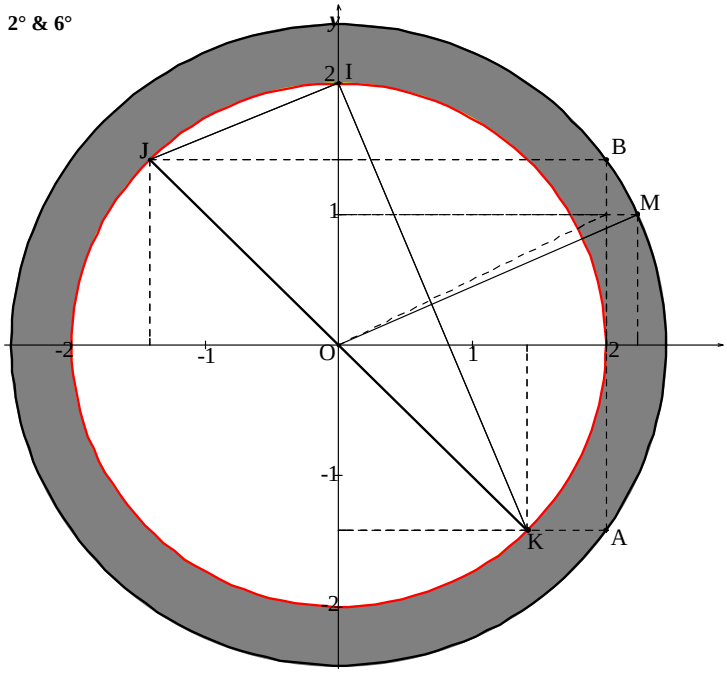
$z_2 = \dfrac{4+2\sqrt{2}i}{2} = 2+\sqrt{2}i$

$S = \left\{2-\sqrt{2}i;2+\sqrt{2}i\right\}$.

3° $z_A = 2-\sqrt{2}i$

$|z_A| = \sqrt{2^2+\sqrt{2}^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$.

2° & 6°




$z_B = -\sqrt{2}-2i = \overline{z_A}$ , $z_B et\ \overline{z_A}$ sont conjugués donc $|z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = \sqrt{6}$ par conséquent les points A et B appartiennent au cercle C de centre O et de rayon $R = \sqrt{6}cm$.

4°. a . $z_J = 2e^{i3\pi/4} = 2(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

b. $z_K = -z_J = -\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$ , donc $z_K$ et $z_J$ sont symétrique par rapport à l'origine du repère

5°. 4/On commence par calculer les affixes des vecteurs

$\overrightarrow{IJ}\left(z_J - z_I\right)$ $\overrightarrow{JK}\left(z_K - z_J\right)$ $\overrightarrow{IK}\left(z_K - z_I\right)$

$\left(z_J - z_I\right) = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}-2i$ $\left(z_K - z_J\right) = \sqrt{2}-i\sqrt{2}-\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$

$\left(z_J - z_I\right) = -\sqrt{2}+i(\sqrt{2}-2)$ $\left(z_J - z_I\right) = 2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$

$\left(z_K - z_I\right) = \sqrt{2}-i\sqrt{2}-2i$

$\left(z_J - z_I\right) = \sqrt{2}-i(\sqrt{2}+2)$

$\overrightarrow{IJ}\left(-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}-2\right)$ $\overrightarrow{JK}\left(2\sqrt{2}\,;-2\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{IK}\left(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}-2\right)$

On pourra utiliser 3 méthodes : 1ère méthode : produit scalaire

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux , en effet : ( rappel : deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si, $x_{\overrightarrow{IJ}} \times x_{\overrightarrow{IK}} + y_{\overrightarrow{IJ}} y_{\overrightarrow{IK}} = 0$ ) C'est –à dire

$\sqrt{2}\times\left(-\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+2\right)\left(-\sqrt{2}-2\right) = -\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(-\sqrt{2}+2\right)\left(\sqrt{2}+2\right) = -2-\left[4-\left(\sqrt{2}\right)^2\right] = -2+2=0$, cela signifie que le vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont orthogonaux et par conséquent les droites $(IJ)$ et $(IK)$ sont perpendiculaires et le triangle $IJK$ rectangle en $I$ .

2ème méthode : calcul des modules

$\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = IJ = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \left(\sqrt{2}-2\right)^2}$ ; $\left\|\overrightarrow{JK}\right\| = JK = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2}$ ;

$= \sqrt{2+2-4\sqrt{2}+4} = \sqrt{8-4\sqrt{2}}$ $= \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$

$\left\|\overrightarrow{IK}\right\| = IK = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2-\sqrt{2}\right)^2}$

$= \sqrt{2+4+4\sqrt{2}+2} = \sqrt{8+4\sqrt{2}}$

On constate que $IJ^2 = 8-4\sqrt{2}$ et $IK^2 = 16$ et $IK^2 = 8+4\sqrt{2}$ ,et que $JK^2 = IJ^2 + IK^2$ , d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle $IJK$ rectangle en $I$ .

**CORRIGE SUJET 14**

1. $z^2 - z + 1 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times1 = 1-4 = -3 = 3i^2$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3i^2} = i\sqrt{3}$ , donc $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

2. forme exponentielle de $z_A$ et $z_E$ . $\left|z_A\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ , soit $\theta_A = \arg z_A$ un argument de $z_A$ , donc $\begin{cases}\cos\theta_A = \dfrac{1}{2}, & \sin\theta_A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta_A = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{cases}$ ,

on en déduit la forme exponentielle de $z_A$ est $z_A = e^{i\pi/3}$.

$z_E$ est le nombre complexe conjugué de $z_A$.donc on a : $|z_A|=|z_E|=1$ et

$\arg z_E=-\arg z_A=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

D'où la forme exponentielle de $z_E$ : $z_E=e^{-i\pi/3}$.

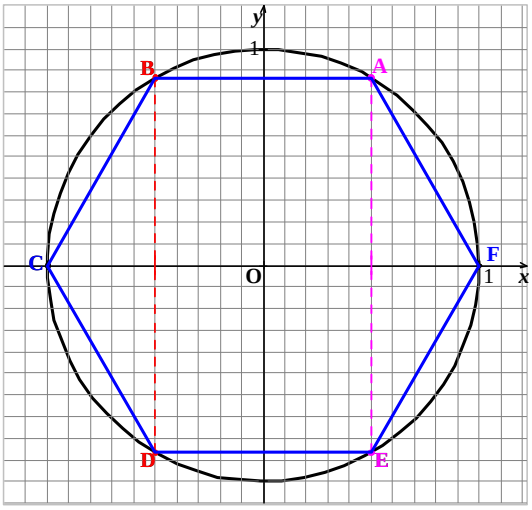
b. comme $|z_A|=|z_E|=1$, on en déduit que $OA=OE=1$, donc les point A et E appartiennent au cercle ( C ) de centre O et de rayon 1 .puisque $z_A=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, A est le point d'abscisse $1/2$ et d'ordonnée positive de ce cercle .

$z_E$ est le nombre complexe conjugué de $z_A$, donc E est le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses .

3. $z_B=(z_A)^2=\left(e^{i\pi/3}\right)^2=e^{2i\pi/3}$ ; $z_C=(z_A)^3=\left(e^{i\pi/3}\right)^3=e^{i\pi}=-1$ ; $z_D=(z_A)^4=\left(e^{i\pi/3}\right)^4=e^{4i\pi/3}$

$z_F=(z_A)^6=\left(e^{i\pi/3}\right)^6=e^{6i\pi/3}=e^{2i\pi}=1$ .on a utilisé dans chaque calcul la formule $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$, pour n entier .

b. d'après leur forme exponentielle , on constate que les nombres complexes $z_A$ , $z_B$ , $z_C$ , $z_D$ , $z_E$ et $z_F$ ont le même module : 1 . On en déduit : OA= OB= OC= OD= OE= OF =1, ainsi , les points A ,B, C, D, E et F sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1 .




c . $z_B=e^{2i\pi/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

$z_D=e^{4i\pi/3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Ainsi , le point D est le symétrique du point B par rapport à l'axe des abscisses .

**CORRIGE SUJET 16**

1. Résolution de l'équation $z^2+6\sqrt{3}z+36=0$ :

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(6\sqrt{3}\right)^2-4\times36=108-144=-36<0$ , $\Delta=36i^2$ et on a $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36i^2}=6i$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\frac{-6\sqrt{3}-i\sqrt{36}}{2}=\frac{-6\sqrt{3}-6i}{2}=-3\sqrt{3}-3i$ , De même : $z_2=-3\sqrt{3}+3i$

L'ensemble des solutions est donc : $S=\left\{-3\sqrt{3}-3i;-3\sqrt{3}+3i\right\}$

2. a) Calcul du module et d'un argument de $z_A=-3\sqrt{3}+3i$ :

$|z_A|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+3^2}=\sqrt{27+9}=\sqrt{36}=6$

Soit $\theta_A$ un argument de $z_A$ ; $\theta_A$ est tel que : $\begin{cases}\cos\theta_A = \dfrac{a}{|z_A|} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{b}{|z_A|} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}\end{cases}$ donc :

$\theta_A = \arg z_A = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ,

où k est un entier relatif.

Calcul du module et d'un argument de $z_B = -3\sqrt{3} - 3i$ : $z_B = \overline{z_A}$ , donc $|z_B| = |\overline{z_A}| = 6$

et $\theta_B = \arg\overline{z_A} = -\arg z_A = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

2. b) On en déduit la forme exponentielle de $z_A = -3\sqrt{3} + 3i$ :

$z_A = 6\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = 6e^{5\pi i/6}$

2. c) Pour placer les points A et B avec précision, étant donné que OA = OB = 6, on peut les placer sur
le cercle de centre O et de rayon 6, en utilisant leurs ordonnées qui sont entières.

3. a) Calcul des longueurs AC et BC :

on calcule d'abord l'affixe du chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ,

en effet : $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = -3\sqrt{3} - 3i$ et

$$AC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

de même $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -3\sqrt{3} - 3i - \left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = 6i$ et $AB = \sqrt{36} = 6\,cm$ .

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = -6\sqrt{3} - \left(-3\sqrt{3} - 3i\right) = -3\sqrt{3} + 3i$ et

$$BC == \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

On a AC = AC donc le triangle ABC est isocèle en A.
De plus : AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.

3. b) On a AC = BC = OA = OB (= 6) donc OACD est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même
longueur, c'est donc un losange.

4. a) Voir figure : Comme $z_K = iz_A$ , $z_K = i\left(-3\sqrt{3} + 3i\right) = -3 - 3\sqrt{3}i$

$$OK = \sqrt{(-3)^2 + \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6\,cm \ ; \ \begin{cases}\cos\theta_K = \dfrac{a}{|z_A|} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\theta_K = \dfrac{b}{|z_A|} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

$\theta_K = \arg z_K = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

et $z_K = 6e^{4\pi i/3}$ on a donc $|z_K| = |iz_A| = |i||z_A| = 1\times 6 = 6 = OK$ ,donc $OA = OK = 6\,cm$ .OAK est

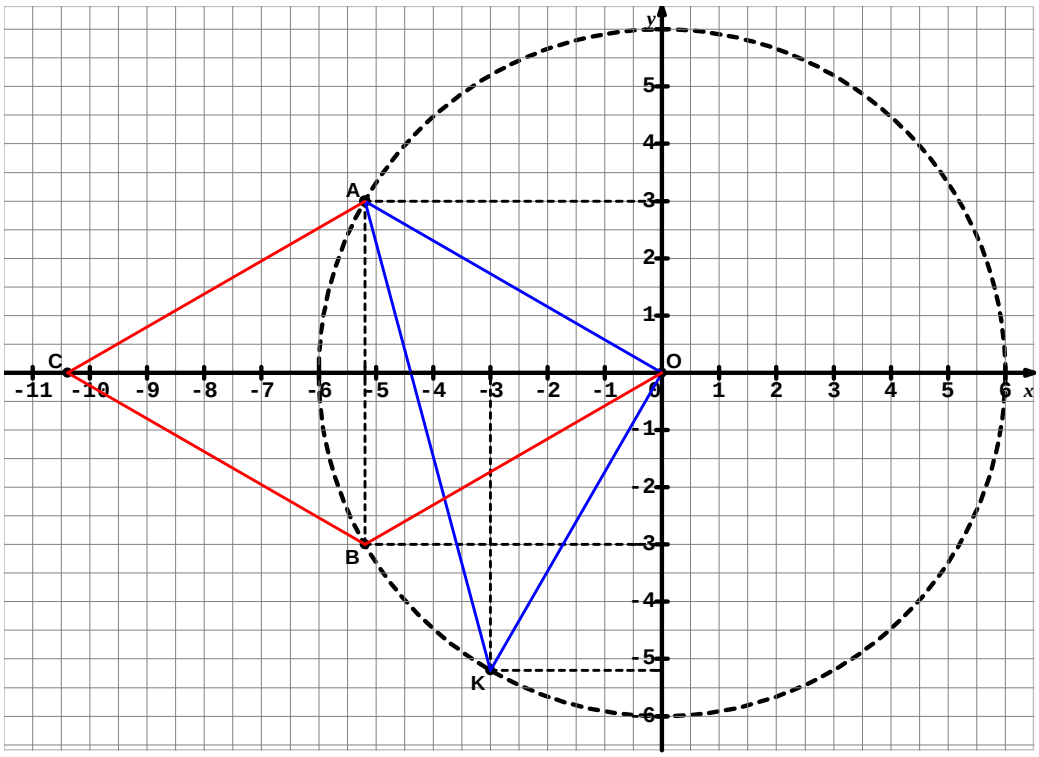
donc un triangle isocèle en O, de plus K appartient au cercle de centre O et de rayon OA.

Calculons AK : $z_{\overrightarrow{AK}} = z_K - z_A = -3-3\sqrt{3}i-\left(-3\sqrt{3}+3i\right)=\left(3\sqrt{3}-3\right)-\left(3\sqrt{3}+3\right)i$

$AK == \sqrt{\left(3\sqrt{3}-3\right)^2+\left(3\sqrt{3}+3\right)^2} = \sqrt{27+9-18\sqrt{3}+27+9+18\sqrt{3}} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\,cm$.

On constate que $OA^2+OK^2 = 6^2+6^2 = 36+36 = 72$ et $AK^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72$, donc on a : $OA^2+OK^2 = AK^2$,

d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle OAK est aussi rectangle en O




**CORRIGE SUJET 17**

**Partie A**

**1.** $\left(z+2\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z\sqrt{3}+12\right) = z^3+2\sqrt{3}z^2+12z+2\sqrt{3}z^2+12z+24\sqrt{3} =$

$z^3+\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)z^2+24z+24\sqrt{3}$

$= z^3+4\,z^2\sqrt{3}+24\,z+24\sqrt{3} = P(z)$

**2.** Résolution de l'équation $z^2+2z\sqrt{3}+12=0$ :

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2-4ac = \left(2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times12 = 12-48 = -36$

$\Delta$ < 0, l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3} - i\sqrt{36}}{2} = -\sqrt{3} - 3i$ . De même : $z_2 = \overline{z}_1 = -\sqrt{3} + 3i$ . $S = \left\{-\sqrt{3} - 3i; -\sqrt{3} + 3i\right\}$

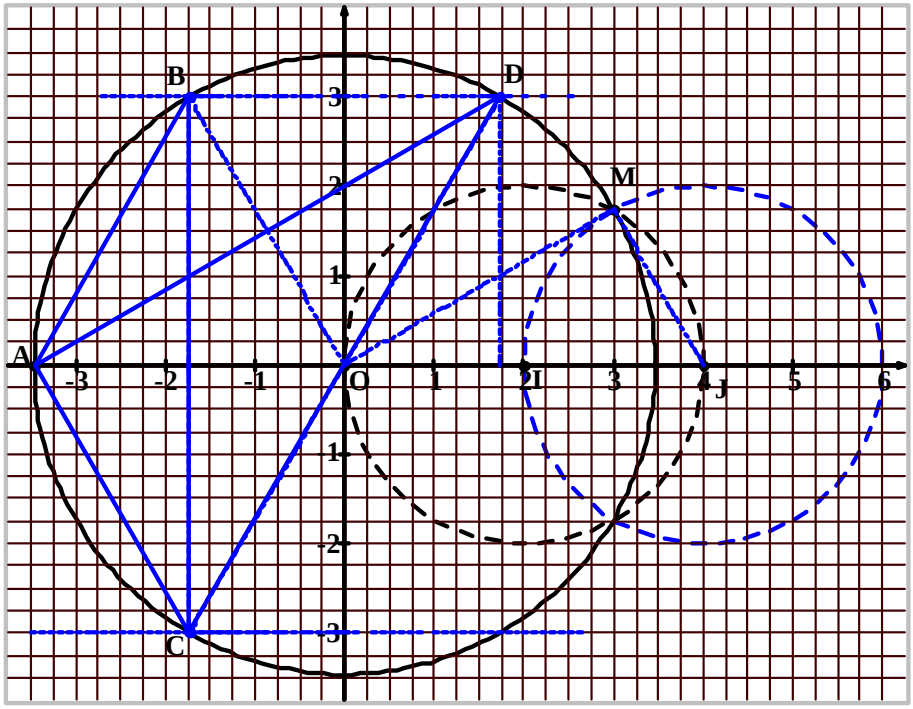
**3.** Résolution de l'équation $P(z) = 0$ :

$\left(z + 2\sqrt{3}\right)\left(z^2 + 2z\sqrt{3} + 12\right) = 0 \Leftrightarrow z + 2\sqrt{3} = 0$ *ou* $z^2 + 2z\sqrt{3} + 1 = 0$ .

Donc : $S = \left\{-2\sqrt{3}\,; -\sqrt{3} + 3i\,; -\sqrt{3} - 3i\right\}$

***Partie B***

1°.




**2. a)** Calcul des modules $|z_A| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$ ;

$|z_B| = |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et

$|z_C| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2\sqrt{3}$

Calcul des arguments : On note respectivement $\theta_A$, $\theta_B$ et $\theta_C$ un des arguments de $z_A$, $z_B$ et $z_C$.

$z_A = -2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\pi}$ donc $\theta_A = \arg z_A = \pi + 2k\pi$ ;

$z_B = -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{2i\pi/3}$, donc

$\arg z_B = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ .

comme $z_C = \overline{z_B}$, on a donc $\theta_C = \arg z_C = -\arg z_B = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ .

**b)** La forme exponentielle d'un nombre complexe *z* de module $\rho$ et d'argument $\theta$ est : $z = \rho\, e^{i\theta}$, donc : $z_A = 2\sqrt{3}\, e^{i\pi}$ ; $z_B = 2\sqrt{3}\, e^{\frac{2\pi}{3}i}$ et $z_C = \overline{z}_B = 2\sqrt{3} e^{-\frac{2\pi}{3}i} = 2\sqrt{3} e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

**3. a)** Soit *M* un point du plan et *M'* son image par la rotation *R* de centre *O* et d'angle $-\pi/3$.

On note *z* et *z'* les affixes respectives des points *M* et *M* '. On a : $z' = z e^{-i\pi/3}$

**b)** Soit *A'* l'image de *A* par la rotation *R* :

$$z_A' = z_A e^{-i\frac{\pi}{3}} = -2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{3}} = -2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} + 3i = z_B$$

Donc *B* est l'image de *A* par la rotation *R*.

**c)** Soit *D* l'image de *B* par *R* :

$$z_D = z_B\, e^{-i\frac{\pi}{3}} = \left(-\sqrt{3} + 3i\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\sqrt{3} + 3i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}^2}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i^2 = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{2}i = \sqrt{3} + 3i$$

**4. a)** Soit *I* le milieu de [*CD*] : $z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{-\sqrt{3} - 3i - \sqrt{3} - 3i}{2} = 0$

Donc *O* est le milieu du segment [*CD*] et donc le centre du cercle de rayon $OC = |z_C| = 2\sqrt{3}$.

**b)** En utilisant les résultats de la question **2.**a), on a :

$OA = |z_A| = 2\sqrt{3}$ ; $OB = |z_B| = 2\sqrt{3}$ ;

Donc A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{3}$.

**c)** On a montré que les points A et B appartiennent au cercle de diamètre [CD], donc d'après la propriété du triangle rectangle et du cercle circonscrit, les triangles CAD et CBD sont rectangles en A et B.

## CORRIGE SUJET 18

1. a) Déterminons les nombres complexes a, c et c tels que $P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c)$ :

Pour tout nombre complexe z, on a :

$$P(z) = (z+2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz + 2az^2 + 2bz + 2c = az^3 + (b+2a)z^2 + (2b+c)z + 2c$$

Or, $P(z) = z^3 - 2z^2 + 16$. Ainsi, par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = -2 \\ 2b + c = 0 \\ 2c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - 2a = -2 - 2 = -4 \\ c = 8 \end{cases}$$

D'où : $P(z) = (z+2)(z^2 - 4z + 8)$

1. b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ : Un produit de facteur est nul si au moins un des facteurs est nul

$P(z)=0$ équivaut à $z-2=0$ ou $z^2-4z+8=0$. La solution de la première équation est 2.

Pour la deuxième équation, calculons le discriminant :

$\Delta=(-4)^2-4\times1\times8=16-32=-16=16i^2=(4i)^2$

L'équation admet donc deux racines complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4-4i}{2}=2-2i$

$z_2=\dfrac{4+4i}{2}=2+2i$

Les solutions de l'équation sont : $S=\{2;2-2i;2+2i\}$

2. a) Ecrivons sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle les nombres $z_A$ et $z_B$ :

$z_A=2-2i$ $|z_A|=|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Un argument de $z_A$ est donné par : $\begin{cases}\cos\theta_A=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ Donc un argument de $z_A$ est $\theta_A=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ D'où : $z_A=2\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4)-i\sin(\pi/4)\right)=2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}=\left[2\sqrt{2};-\pi/4\right]$.

On sait que $z_B=\overline{z_A}$ , donc $|z_B|=|\overline{z_A}|=|z_A|=2\sqrt{2}$

Un argument de $z_B$ est donné par : $\arg z_B=\arg\overline{z_A}=-\arg z_A=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$

2. b) Plaçons dans le plan $P$ les points A et B :

c) Nature du triangle OAB :

On a : $OA=|z_A|=OB=|z_B|=2\sqrt{2}$ , donc OA = OB. Le triangle OAB est isocèle en O.

De plus,

$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\vec{u}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)=\arg z_B-\arg z_A=\dfrac{\pi}{4}-(-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

On en déduit alors que le triangle OAB est rectangle en O. D'où : OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

3. a) Caractérisons géométriquement la transformation T :

La transformation T est la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$

3. b) Déterminons sous forme trigonométrique l'affixe du point A' :

$z_{A'}=e^{i\pi/3}\times z_A=2\sqrt{2}e^{i\pi/3}e^{-i\pi/3}=2\sqrt{2}e^{i(\pi/3-\pi/4)}=2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$

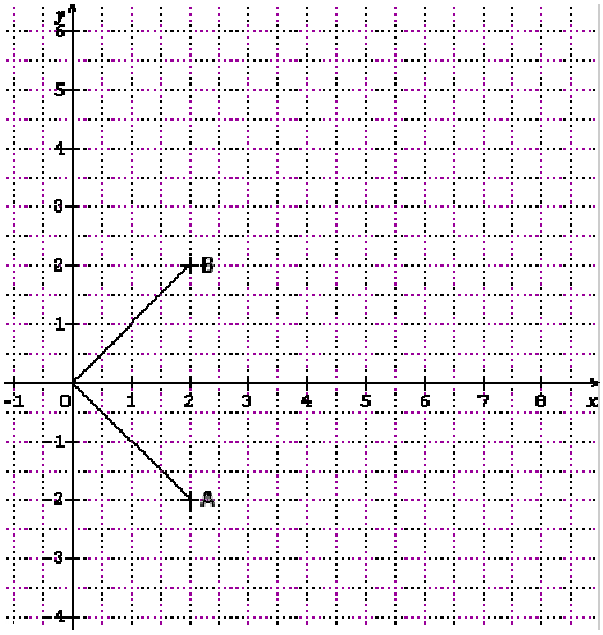
Déterminons sous forme algébrique l'affixe du point A' :

$z_{A'}=e^{i\pi/3}\times z_A=\left(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)\right)(2-2i)=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-2i)$

$z_{A'}=1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}=\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i+1=(1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i$

3. c) Déduisons en les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ : De la question précédente, on en déduit que :

$$z_{A'} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \left(1+\sqrt{3}\right) + (\sqrt{3}-1)i$$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$