SUJET 49

On note *i* le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble C des nombres complexes, l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}\,z + 64 = 0$

2. Soit z_0 le nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{6}$.

Calculer le module et un argument du nombre complexe $z_0^{\,3}$.En déduire la forme algébrique de $z_0^{\,3}$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 8i$; $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ et $z_C = \overline{z_B}$

où $\overline{z_B}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_B.

1. Calculer le module et déterminer un argument de z_B puis de z_C 2. Vérifier que $z_A = 8e^{i\pi/2}$

3. On appelle z_D l'affixe du point D, image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$.

a. Déterminer z_D et l'écrire sous la forme $re^{i\theta}$, où *r* est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π. b. En déduire que $z_D = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. a. Placer les points A, B, C et D dans le repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 1 cm.

b. Démontrer que le triangle OAD est équilatéral.

c. Démontrer que le point O est le milieu du segment [CD].

d. Déterminer la nature du triangle ACD.

SUJET 50

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application *f* du plan dans lui-même qui, à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M*' d'affixe *z*' telle que : $z' = z^2 - 4z$.

1. Soient *A* et *B* les points d'affixes $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a. Calculer les affixes des points *A*' et *B*' images des points *A* et *B* par *f*.

b. On suppose que deux points ont la même image par *f*. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit *I* le point d'affixe −3.

a. Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$. En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.
b. On considère les points *J* et *K* d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$. Démontrer que tous les points *M* du cercle (C) de centre *J* et de rayon 2 ont leur image *M*' sur un cercle que l'on déterminera.
c. Soit *E* le point d'affixe $z_E = -4-3i$. Donner la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et démontrer à l'aide du 3. a. qu'il existe deux points dont l'image par *f* est le point *E*. Préciser sous forme algébrique les affixes de ces deux points.

SUJET 51
Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.
1. On rappelle que, pour tous nombres complexes *a* et *b*, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.
2. On désigne par *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives *a*, *b* et *c* définies par : *a* = 2, $b = -1+i\sqrt{3}$ et $c = -1-i\sqrt{3}$.
On appelle *r* la rotation de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et *r'* la rotation de centre *A* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note *b'* et *c'* les affixes respectives de *B'* et *C'*.
a. Placer les points *A*, *B* et *C* dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.
b. Montrer que $b' = 2+\sqrt{3}+3i$.
c. Montrer que *b'* et *c'* sont des nombres conjugués.
3. On appelle *M*, *N*, *P* et *Q* les milieux respectifs des segments [*CB*], [*BB'*], [*B'C'*] et [*C'C*]. On note *m*, *n*, *p* et *q* leurs affixes.
a. Montrer que l'affixe *n* du point *N* est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. En déduire que les points *O*, *N* et *C* sont alignés.
b. Montrer que *n* + 1 = *i*(*q* + 1). Que peut-on en déduire pour le triangle *MNQ* ?
c. Montrer que le quadrilatère *MNPQ* est un carré
Correction

SUJET 53
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, *i* désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).
b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de 1. une solution de (E') : $z^3 = -8i$.

4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.
b. Montrer que b et c sont solutions de (E').
5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.
b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?
c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

SUJET 54

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.
b. En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg ($z' - 1$) et arg ($z + 1$), pour tout nombre complexe z différent de -1. Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
a. Déterminer la forme exponentielle de (p +1).
b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).
c. Soit Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de p. Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .