I – Etude d'une suite définie par $U_n = f(n)$

On considère la suite de terme général $U_n = 2^n - n$ pour n entier naturel.
1°) A l'aide de la calculatrice , obtenir les quinze premiers termes de la suite et conjecturer son sens de variation et son comportement asymptotique.
2°) Démontrer la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (U_n).
3°) Démontrer , par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n \geq 1{,}5^n$.
4°) En déduire la limite de la suite (U_n).

II – Etude de suites définies par $U_{n+1} = a U_n + b$

Exercice 1 Dans une réserve , une population initiale de 1000 animaux évolue ainsi : chaque année, 20 % des animaux disparaissent (c'est le bilan global des naissances et des décès) et on introduit 120 animaux supplémentaires. On note P_n la population au bout de n années et on pose $P_0 = 1000$
1°) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. On appelle f la fonction telle que $P_{n+1} = f(P_n)$. Préciser l'expression de f (x).
2°) Représenter dans un repère orthonormé (on choisira un carreau pour 100 unités), la courbe (Δ) de la fonction f et la droite (D) d'équation y = x .Représenter sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite , selon le procédé vu en Première. Conjecturer à partir du graphique le sens de variation et la limite de la suite (P_n).
3°) Déterminer l 'abscisse α du point d'intersection de (Δ) et de (D).
4°) On pose $R_n = P_n - \alpha$.
   a) Montrer que la suite (R_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   b) Exprimer R_n puis P_n en fonction de n .
   c) En déduire le comportement asymptotique de la suite (P_n).
5°) Démontrer la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (P_n).

Exercice 2 Une automobile est vendue neuve au prix de 15 000 € au 1er Janvier 2002. On calcule sa côte annuelle (prix de vente estimé) de la façon suivante : chaque année , la nouvelle côte est égale à celle de l'année précédente diminuée de 25 %, le tout augmenté de 500 €. On appelle U_n le montant de la côte au 1er Janvier (2002 + n) .
1°) a) Calculer U_0 , U_1 , et U_2 .
   b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n , pour tout entier naturel n
2°) Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (U_n). Conjecturer le sens de variation et le comportement asymptotique de cette suite.
3°) On pose $V_n = U_n - 2000$
   a)Démontrer que la suite (V_n) est géométrique et en déduire l'expression de U_n en fonction de n .
   b)Démontrer les conjectures émises à la question précédente et déterminer la limite de la suite (U_n).
   c)Déterminer la date à partir de laquelle le véhicule aura une côte inférieure à 5000 €.

III- Rapidité de convergence

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par :
▪ Pour $n \geq 1$ $U_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ et ▪ $V_0 = 3$ et $V_{n+1} = 0{,}5\, V_n + 1$

1°) Calculer les cinq premiers termes de chaque suite

2°) Déterminer la limite de (U_n) et conjecturer , à l'aide de la calculatrice , le comportement de (V_n) .

3°) Soit $W_n = V_n - 2$ pour $n \geq 1$ .Montrer que la suite (W_n) est géométrique et converge vers 0.Que peut-on en déduire pour la suite (V_n) ?

4°) A l'aide de la calculatrice , dresser la liste des valeurs de U_n , V_n , $|U_n - 2|$, et $|V_n - 2|$ pour les valeurs de n de 1 à 15.que constate-t-on ?

5°) Les deux suites (U_n) et (V_n) convergent vers le même réel 2 , mais leurs rapidité de convergence sont différentes ; pour évaluer cette rapidité , on étudie la convergence vers 0 des différences $|U_n - 2|$ et $|V_n - 2|$. Calculer ces différences puis déterminer la limite , quand n tend vers $+\infty$, du quotient $\dfrac{|U_n - 2|}{|V_n - 2|}$.

Commenter.

III- Rapidité de convergence

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par :

- Pour $n \geq 1$ $\quad U_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ et
- $V_0 = 3$ et $V_{n+1} = 0{,}5\, V_n + 1$

1°) Calculer les cinq premiers termes de chaque suite

2°) Déterminer la limite de (U_n) et conjecturer , à l'aide de la calculatrice , le comportement de (V_n) .

3°) Soit $W_n = V_n - 2$ pour $n \geq 1$ .Montrer que la suite (W_n) est géométrique et converge vers 0.Que peut-on en déduire pour la suite (V_n) ?

4°) A l'aide de la calculatrice , dresser la liste des valeurs de U_n , V_n , $|U_n - 2|$, et $|V_n - 2|$ pour les valeurs de n de 1 à 15.que constate-t-on ?

5°) Les deux suites (U_n) et (V_n) convergent vers le même réel 2 , mais leurs rapidité de convergence sont différentes ; pour évaluer cette rapidité , on étudie la convergence vers 0 des différences $|U_n - 2|$ et $|V_n - 2|$. Calculer ces différences puis déterminer la limite , quand n tend vers $+\infty$, du quotient $\dfrac{|U_n - 2|}{|V_n - 2|}$.

Commenter.