Suites Numériques

- **<u>Exercice 1</u>**

L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel (symbole dB). Une source sonore émet un son d'intensité 100 décibels ($u_0 = 100$). On appelle u_n (où l'entier *n* est supérieur ou égal à 1) l'intensité du son mesurée
après la traversée de *n* plaques d'isolation phonique, sachant que chaque plaque d'isolation absorbe 10 % de l'intensité
du son qui lui parvient (par exemple $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0$).

1. Calculer u_1 , u_2 , u_3 .
2. Déterminer la relation entre u_{n+1} *et* u_n puis exprimer u_n en fonction de u_0 et de *n.*
3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n)
4. Déterminer à partir de quelle valeur de *n* l'intensité du son devient inférieure à 1 dB.

- **<u>Exercice 2</u>**

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23 % de son intensité lumineuse.
Soit I_0 l'intensité d'un rayon à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à sa sortie.

1. Exprimer I_1 en fonction de I_0.
2. On superpose *n* plaques de verre identiques; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la nième plaque.

a. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}. Quelle est la nature de la suite (I_n)?
b. Préciser le premier terme et la raison: en déduire l'expression de I_n en fonction de I_0. Préciser, en le justifiant, le
sens de variation de la suite (I_n) .

3. Quelle est l'intensité initiale I_0 d'un rayon lumineux dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?
4. Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit
inférieure ou égale au quart de son intensité entrante.

- **<u>Exercice 3</u>**

Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est 1 013 hectopascal. Dans cet exercice, on admet que la pression atmosphérique diminue de 1,25% à chaque élévation de 100 m. Pour tout entier naturel *n*, on note P_n la pression, exprimée en hectopascal, à l'altitude 100n, exprimée en mètres. Soit (P_n) la suite numérique des valeurs prises par cette pression atmosphérique. On a alors $P_0 = 1013$.

1. Calculer les pressions P_1 et P_2, arrondies à l'unité, aux altitudes 100 et 200.
2. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. En déduire la nature de la suite (P_n). Préciser sa raison et son premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $P_n = 1013 \times 0,9875^n$.
3. Calculer la pression atmosphérique, arrondie à l'unité, à l'altitude 3 200.
4. Calculer à partir de quelle altitude, à 100 m près, la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascal.

- **<u>Exercice 4</u>**

1. Soit (E) l'équation différentielle : $y'+2y = 0$,où *y* est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
 a. Résoudre l'équation (E).
 b. Déterminer la solution *f* de (E) telle que *f* (0) = 1 .
2. a. Calculer la valeur moyenne de *f* sur [0; 10] .

b. Déterminer, en fonction de *n*, la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle [*n ; n*+ 1].

3. Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{1}{2}(1-e^{-2})e^{-2n}$, pour tout *n* entier positif ou nul.

a. Calculer la valeur exacte de u_1 , u_2 , u_3 .

b. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c. Déterminer la valeur exacte de la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_9$.

- **Exercice 5**

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon.

Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2%.

On note (u_n) (*n* entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après *n* frappes de marteau pilon.

On a donc $u_0 = 20$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats arrondis au centième de millimètre.
2. Démontrer que la suite (*un*) est géométrique, et préciser sa raison.
3. Déterminer u_n en fonction de l'entier *n*.
4. Quelle est l'épaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes ?
5. On considère que la pièce est terminée dès que son épaisseur est inférieure à 14 millimètres.
   Quel est le temps minimal pour que la pièce soit terminée ?

- **Exercice 6**

Partie A

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise A s'élevait à 230 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a
augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1991.
2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990+n.
   Quelle est la nature de la suite (u_n)? Préciser le premier tenue u_0 et la raison a de cette suite.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A.

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires d'une entreprise B s'élevait à 150 000 euros.

Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1991.
2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990+n. Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,074.
3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B.

Partie C

1. Que constate-t-on en 2006 pour les entreprises A et B?
2. En 2006, le chef de l'entreprise B affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires
   pratiquement double de celui de l'entreprise A. A-t-il raison? Justifier.

- **Exercice 7 :**

Le 01/01/2008, un nouvel employé dans une entreprise se voit proposer deux formules pour l'évolution de son salaire mensuel : dans la formule *A*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 20 euros ; dans la formule *B*, il est augmenté tous les ans, au 1er janvier, de 1,5 %. Son salaire mensuel initial durant l'année 2008 est de 1200 euros.

On note u_n (respectivement v_n) le salaire annuel selon la formule *A* (respectivement *B*) durant l'année $2008 + n$.

1. Expliquer pourquoi, en 2008, on a $u_0 = v_0 = 14400$
2. Expliquer pourquoi, en 2009, on a $u_1 = 14640$ et $v_1 = 14616$.

3. Donner, en justifiant la réponse, la nature des deux suites étudiées. Préciser la raison pour chacune de ces deux suites.
4. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
5. Calculer et comparer les deux formules en 2018 puis en 2028 (arrondir les résultats au centime d'euro)
6. Cet employé partira à la retraite, au bout de 42 années complètes de travail dans cette entreprise. Il décide de calculer combien il aurait gagné d'argent dans toute sa carrière. On appelle S_n et T_n les sommes des termes des deux suites étudiées, définies par :
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...u_{n-1} + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...v_{n-1} + v_n$
Calculer combien l'employé aurait gagné dans toute sa carrière selon chacune des formules *A* et *B*.

- ***Exercice 8***

1°) La production annuelle d'une entreprise A est en progression arithmétique et atteint 12000 exemplaires la sixième année .La production totale au cours de ces six années a été de 58500 exemplaires .On appelle p_n la production de A au cours de la $n^{ième}$ année .

a) calculer la production p_1 de la première année et la raison r de la suite arithmétique.

b) Au bout de combien d'années , si la politique de A ne change pas , la production aura -t-elle dépassé le double de sa production initiale ?

2°) Une autre entreprise B a commencé sa production annuelle avec $q_1 = 7500$ exemplaires ,elle augmente sa production chaque année de 10 % par rapport à l'année précédente .

a) En appelant q_n la production de B la $n^{ième}$ année , montrer que la suite (q_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison .Calculer q_2.

b) Ecrire q_n en fonction de n . Calculer q_6 . (arrondir les résultats à l'unité la plus proche)

c) Au bout de combien d'années dans ces conditions , la production annuelle dépassera-t- elle le double de la production initiale ?

d)Déterminer la production totale de l'entreprise B au cours de ces six années.

<u>Corrigé</u>

- **<u>Exercice 1</u>**

1. $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$

Le son perd 10 % de son intensité , cela se traduit par $u_1 = u_0 - \frac{10}{100}u_0 = u_0 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_0 = 0,9u_0$.

$u_2 = u_1 - \frac{10}{100}u_1 = u_1 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_1 = 0,9 \times 0,9u_0 = \left(0,9\right)^2 u_0$.

$u_3 = u_2 - \frac{10}{100}u_2 = u_2 \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_2 = \left(0,9\right)^3 u_0$

2. En raisonnant comme à la première question , sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de l'intensité u_n à u_{n+1} : $u_{n+1} = u_n - \frac{10}{100}u_n = u_n \times (1 - \frac{10}{100}) = \frac{90}{100}u_n = 0,9u_n$; $u_{n+1} = 0,9u_n$.

La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique .

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ .son premier terme est u_0 . Le cours donne la formule générale $u_{n+1} = qu_n = q^{n+1}u_0$., donc on a : $u_n = q^n u_0 = \left(0,9\right)^n u_0$ pour tout entier naturel n .

3. c. Déterminons le signe de la différence $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n - u_n = -0,1u_n$

Tous les termes u_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs donc la différence est négative : $u_{n+1} - u_n \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est donc décroissante .

Remarque : Tous les termes u_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0,9u_n}{u_n} = 0,9 < 1$ pour n > 0. La suite (u_n) est donc décroissante.

l'intensité du son devient inférieure à 1 dB quand $u_n = \left(0,9\right)^n u_0 < 1 \Rightarrow \left(0,9\right)^n < \frac{1}{100} = 0,01$

$\Rightarrow \ln\left(0,9\right)^n < \ln(0,01) \Rightarrow n\ln(0,9) < \ln(0,01) \Rightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,9)}$ puisque $\ln(0,9) < 0$; $n \approx 43,709$ soit $n = 44$.

- **Exercice 2 :**

Le rayon lumineux perd 23 % de son intensité , cela se traduit par : $I_1 = I_0 - \frac{23}{100}I_0 = I_0 \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_0$

2.a En raisonnant comme à la première question , sachant qu'il faut traverser une plaque pour passer de l'intensité I_{n-1} à I_n : $I_n = I_{n-1} - \frac{23}{100}I_{n-1} = I_{n-1} \times (1 - \frac{23}{100}) = \frac{77}{100}I_{n-1}$; $I_n = 0,77I_{n-1}$.

b. La relation trouvée à la question précédente définit une suite géométrique .

La suite (I_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,77$ .son premier terme est I_0.

Le cours donne la formule générale $I_n = qI_{n-1} = q^n I_0$.

c. Déterminons le signe de la différence $I_n - I_{n-1}$: $I_n - I_{n-1} = 0,77I_{n-1} - I_{n-1} = -0,23I_{n-1}$.

Tous les termes I_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs donc la différence est négative : $I_n - I_{n-1} \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (I_n) est donc décroissante .

Remarque : Tous les termes I_n, $n \in \mathbb{N}$, sont positifs on peut donc étudier le quotient :

$\frac{I_n}{I_{n-1}} = \frac{0,77I_{n-1}}{I_{n-1}} = 0,77 < 1$ pour n > 0. La suite (I_n) est donc décroissante.

3. l'intensité obtenue après la traversée de 4 plaques est égale à 15 d'où $I_4 = 15 \Leftrightarrow \left(0,77\right)^4 I_0 = 15$

$I_4 = 15 \Leftrightarrow I_0 = \frac{15}{\left(0,77\right)^4} \approx 42,67$.

4. l'intensité sortante étant inférieure ou égale au quart de son intensité rentrante , cela se traduit par l'inéquation $I_n \leq \frac{1}{4}I_0$, ou n est l'inconnue à déterminer .Cette inéquation peut s'écrire :

$\left(0,77\right)^n I_0 \leq 0,25I_0$, après simplification par I_0, on obtient : $\left(0,77\right)^n \leq 0,25$; $\ln\left(0,77\right)^n \leq \ln(0,25)$

$n\ln\left(0,77\right) \leq \ln(0,25)$; $\ln(0,77) < 0$ d'où : $n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln\left(0,77\right)} \approx 5,3$ et $n \in \mathbb{N}$, donc $n = 6$ .Il faudra au minimum 6 plaques pour que l'intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de l'intensité rentrante .

- **Exercice 3**

1. $P_0 = 1013$. P_1 est la pression atmosphérique à la hauteur 100 m. P_1 a diminué de 1,25% par rapport à P_0.

$P_1 = P_0 - \frac{1,25}{100}P_0 = 1013 \times (1 - \frac{1,25}{100}) = 1000$. De même $P_2 = P_1 - \frac{1,25}{100}P_1 = 1000(1 - \frac{1,25}{100}) = 988$

2. a) La pression P_{n+1} diminue de 1,25% par rapport à P_n donc $P_{n+1} = P_n - \frac{1,25}{100}P_n = P_n(1 - \frac{1,25}{100}) = 0,9875P_n$

b) On en déduit que (P_n) est un suite géométrique de raison q = 0,9875 et de premier terme $P_0 = 1013$.

c) On en déduit que $P_n = P_0 q^n$; $P_n = 1013 \times 0,9875^n$.

3. $3200 = 100 \times 32$ donc la pression atmosphérique à l'altitude 3200 m est donné par $P_{32} = 1013 \times 0,9875^{32}$

$P_{32} = 677$ La pression est de 677 hectopascal.

4. $P_n \leq 600$; $1013 \times 0,9875^n \leq 600$; $0,9875^n \leq \frac{600}{1013}$; $\ln(0,9875^n) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right)$;

$n\ln(0,9875) \leq \ln\left(\frac{600}{1013}\right)$; $n \geq \ln\left(\frac{600}{1013}\right)/\ln(0,9875)$ car $\ln(0,9875) \leq 0$. $n \geq 41,6$ soit à partir de $n = 42$. A partir de $42 \times 100 = 4200m$, la pression atmosphérique devient inférieur à 600 hectopascal

- **Exercice 4**

1. $(E) : y' + 2y = 0$

1.a. $y = ce^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0) = 1$.On a donc $1 = ce^{0} = c$ soit c = 1.
D'où *f* est définie par $f(x) = e^{-2x}$.

2.a. La valeur moyenne de *f* sur [0; 10] est : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$; $\mu = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} e^{-2x}dx$

$\mu = \frac{1}{10}\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{10}$; $\mu = \frac{1}{20}\left[1 - e^{-20}\right]$

2.b $\mu = \frac{1}{n+1-n}\int_n^{n+1} e^{-2x}dx$; $\mu = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_n^{n+1}$ $\mu = \frac{-1}{2}\left[e^{-2(n+1)} - e^{n}\right]$; $\mu = \frac{1}{2}\left[e^{-2n} - e^{-2n}e^{-2}\right]$

$\mu = \frac{1}{2}e^{-2n}\left(1 - e^{-2}\right)$

3. $u_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$,

3.a. $u_0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$; $u_1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2}$; $u_2 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-4}$

3.b. Pour montrer que (u_n) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul que tel que $u_{n+1} = qu_n$.

$u_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2(n+1)}$; $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n} \times e^{-2}$; $u_{n+1} = u_n \times e^{-2}$.

Donc (Un) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$ et de raison e^{-2}

3.c $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \text{..........} u_{n-1} + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ .On a donc

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \text{..........} u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)e^{-2} \times \frac{1 - e^{-2n}}{1 - e^{-2}}$.

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \text{..........} u_{n-1} + u_n = \frac{1}{2} \times \left(e^{-2} - e^{-2(n+1)}\right)$.

- **Exercice 5**

Pour former une pièce métallique à partir d'un profilé de 2 centimètres d'épaisseur, on utilise un marteau pilon. Le marteau pilon frappe toutes les 6 secondes, et à chaque coup, l'épaisseur de métal diminue de 2 %. On note u_n (*n* entier naturel) l'épaisseur en millimètres de la pièce après *n* frappes de marteau pilon. On a donc u_0 = 20.

1) Quand une valeur diminue de 2 % , elle est multipliée par 0,98 .

$u_1 = u_0 - 0,2u_0 = 0,98u_0 = 0,98 \times 20 = 19,6mm$ $u_2 = u_1 - 0,2u_1 = 0,98u_1 = 0,98 \times 19,6 = 19,21mm$.

u_3 = 0,98 u_2 = 0,98 × 19,21 = 18,83 mm

2) Chaque terme de cette suite est obtenu en multipliant le terme précédent par 0,98, il s'agit donc bien d'une suite géométrique de raison q = 0,98.

3) $u_n = u_0 \times q^n = 20 \times (0,98)^n$

4) Epaisseur, arrondie au centième de millimètre, de la pièce après 10 frappes :

$u_{10} = 20 \times (0,98)^{10}$ = 16,34 mm

5) On cherche n tel que $u_n \le 14 \quad 20\times(0,98)^{10} \le 14 \;\; 20\times(0,98)^n \le 14 \Leftrightarrow 0,98^n \le \frac{14}{20} = 0,7 \Leftrightarrow n \ge 18$

(En utilisant les touches $y = (0,98)^{\wedge}(x)$ $\ln(0,98)^n \le \ln(0,7) \Leftrightarrow n\ln(0,98) \le \ln(0,7) \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0,7)}{\ln(0,98)} \ge 18$

donc $n \ge 18$, il faut 18 frappes de marteau pilon pour que l'épaisseur en millimètres de la pièce soit inférieure à 14 mm ce qui donne comme le temps minimal pour que la pièce soit terminée : 18 ×6 = 108 s = 1 minutes et 48 secondes.

- ***Exercice 2***

Partie A

1. $u_0 = 15000$. $u_1 = u_0 + 15000 = 245000$ €. Le chiffre d'affaires u_1 en 1991 était de 245 000 €

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n*.

u_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n* + 1, on a : $u_{n+1} = u_n + 15000$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison *a* = 15000 et de premier terme u_0 = 230 000

3. 2006 correspond au 16ème rang donc

$u_{16} = u_0 + 16a = 230000 + 16\times 15000 = 230000 + 240000 = 470000$€ .

le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise A est donc de 470 000 €

Partie B

En 1990, le chiffre d'affaires dune entreprise B s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. $v_0 = 150000$. $v_1 = v_0 \times 1,074 = 161100$. Le chiffre d'affaires v_1 en 1991 était de 161100 €

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n*. v_{n+1} est le chiffre d'affaires de l'année 1990 + *n* + 1, on a : $v_{n+1} = v_n \times 1,074$. Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison *b* =1,074 et de premier terme v_0 = 150 000

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2006 de l'entreprise B. $v_{16} = v_0 \times (q)^{16} = 150000 \times (1,074)^{16} = 470067$ €

Partie C

1. On constate que les chiffres d'affaire des deux entreprises A et B en 2006 sont sensiblement les même malgré le chiffre d'affaire plus conséquent de l'entreprise A en 1990.

2. $u_{31} = u_0 + 31a = 230000 + 31\times 15000 = 695000$€ , donc $2\times u_{31} = 1390000$€

$v_{31} = v_0 \times (q)^{31} = 150000\times(1,074)^{31} = 1371589$, on est pas loin du double en effet.

- **Exercice 7**

1. En 2006 , son salaire mensuel vaut 1200 € donc son salaire annuel vaut $12\times 1200 = 14400$€ .
   Ainsi $u_0 = v_0 = 14400$ (il n'y a pas encore d'augmentation).
2. avec la formule 1 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200 + 20 = 1220$€ , donc le salaire annuel est : $u_1 = 12\times 1220 = 14640$€ . Avec la formule 2 , le salaire mensuel devient en 2007 : $1200 \times 1,015 = 1218$€ ,
   Donc le salaire annuel $v_1 = 12\times 1218 = 14616$€ .
3. D'une année à l'autre , avec la formule 1 , le salaire annuel est augmenté de $12\times 20 = 240$€ . Ainsi $u_{n+1} = u_n + 240$. La suite (u_n)est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 14400$€ et raison $a = 240$. D'une année à l'autre , avec la formule 2 , le salaire mensuel est multiplié par 1,015 .
   Le salaire annuel est également multiplié par 1,015 . v_n est donc une suite géométrique de premier terme $v_0 = 14400$ et de raison 1,015.
4. comme (u_n) est une suite arithmétique de raison $a = 240$; $u_n = u_0 + na = 14400 + 240n$.
   comme (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,015$; $v_n = v_0 \times q^n = 14400 \times (1,015)^n$.

5. En $2018 = 2008+10$, les salaires correspondantes à u_{10} et v_{10}

$v_{10} = v_0 \times q^{10} = 14400 \times (1,015)^{10} \approx 16711,79€$ et $u_{10} = u_0 + na = 14400 + 240 \times 10 = 16800€$ ($v_{10} < u_{10}$)

Donc en 2018 la formule A est plus avantageuse que la formule B

En $2028 = 2008+20$, les salaires correspondantes à u_{20} et v_{20}

$v_{20} = v_0 \times q^{20} = 14400 \times (1,015)^{20} \approx 19394,71€$ et $u_{20} = u_0 + 20a = 14400 + 240 \times 20 = 19200€$ ($u_{20} < v_{20}$)

Donc en 2028 la formule B est plus avantageuse.

6. Avec la formule1 , l'employé aurait après 42 ans de travail : $S_{41} = \dfrac{(41+1)(u_0 + u_{41})}{2}$

Or $u_{41} = u_0 + 41a = 14400 + 240 \times 41 = 24240€$, donc $S_{41} = \dfrac{(42)(14400+24240)}{2} = 21 \times 38640 = 811440€$.

Avec la formule 2 , l'employé aurait gagné pendant toute sa carrière :

$$T_{41} = v_0 + v_1 + ... + v_{40} + v_{41} = 14400 \times \left(\frac{(1,015)^{n+1} - 1}{1,015 - 1} \right) = \frac{14400}{0,015}\left[(1,015)^{42} - 1 \right] \approx 834093,23€.$$

Enfin , sur l'ensemble de sa carrière , c'est la formule B la plus intéressante .

Sur ses 42 ans de carrière , il gagnerait environ : $834093 - 811440 = 22653€$ avec la formule B.

- **<u>Exercice 8</u>**

1. La production annuelle d'une entreprise A est en progression arithmétique, donc on a :

$p_n = p_{n-1} + (n-1)r$ et on a aussi $S = \dfrac{n(p_1 + p_n)}{2}$.

Or $p_6 = 12000$ et $S_A = 58500$ il s'ensuit $\begin{cases} p_6 = p_1 + (n-1)r \\ S_A = \dfrac{6}{2}(p_1 + p_6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12000 = p_1 + 5r \\ 58500 = 3(p_1 + 12000) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1200 = p_1 + 5r \\ 58500 = 3p_1 + 36000 \end{cases}$. $3p_1 = 58500 - 36000 = 22500$ donc $p_1 = \dfrac{22500}{3} = 7500$.

$12000 = p_1 + 5r$, donc $r = \dfrac{12000 - p_1}{5} = \dfrac{12000 - 7500}{5} = \dfrac{4500}{5} = 900$

(p_n) est une suite arithmétique de premier terme $p_1 = 7500$ et de raison $r = 900$.

b. $p_n = 2p_1$, donc $p_1 + (n-1)r = 2p_1$, d'où $(n-1)900 = 2p_1 - p_1 = p_1 = 7500$, donc $n - 1 = \dfrac{7500}{900} = \dfrac{75}{9}$

et enfin $n = \dfrac{75}{9} + 1 = \dfrac{84}{9} \approx 9,3$, comme n est entier ,donc $n = 10$.

$p_{10} = p_1 + (10-1)900 = 7500 + 900 \times 9 = 15600$ $\qquad$ $p_9 = p_1 + (9-1)900 = 7500 + 900 \times 8 = 14700$.

2°. $q_1 = 7500$; $q_2 = q_1 + \dfrac{10}{100}q_1 = 1,1q_1 = 1,1 \times 7500 = 8250$, donc $\dfrac{q_2}{q_1} = 1,1$, il en résulte que (q_n)est une suite géométrique de raison $b = 1,1$ .Par définition $q_n = bq_{n-1} = q_1 b^{n-1}$ et on a $q_n = (1,1)^{n-1} q_1$.

$q_6 = (1,1)^5 \times 7500 = 12078,8$. $\quad$ $q_n = 2q_1$ donc $\dfrac{q_n}{q_1} = 2$ et $(1,1)^{n-1} = 2$. Or $(1,1)^7 \approx 1,94$ et $(1,1)^8 \approx 2,11$

Donc par passage au double , on a $n - 1 = 8$, c'est-à-dire $n = 9$.

$q_8 = (1,1)^7 \times 7500 \approx 14615$ et $q_9 = (1,1)^8 \times 7500 \approx 16076$. $\quad S_B = q_1 \dfrac{b^6 - 1}{b - 1} = 7500 \times \dfrac{(1,1)^6 - 1}{0,1} \approx 57867$.