

PROF :	CHAPITRE : COMPLEXES-PROBABILITE	ISTAS
	DEVOIR SURVEILLE N° DE MATHEMATIQUES	DUREE

EXERCICE 1

- Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$, où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
 - Résoudre l'équation (E).
 - Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
- Calculer la valeur moyenne de f sur $[0; 10]$.
 - Déterminer, en fonction de n , la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n; n+1]$.
- Soit (u_n) la suite définie par : $U_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})e^{-2n}$, pour tout n entier positif ou nul.
 - Calculer la valeur exacte de U_0 , U_1 et U_2 .
 - Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Déterminer la valeur exacte de la somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_9$.

EXERCICE 2



Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$; $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z . Donner la forme exponentielle de z_1 , z_2 et Z .
- En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.
On désigne par M_1 , M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et Z .
Placer le point M_2 , puis placer les points M_1 et M_3 en utilisant la règle et le compas
(on laissera les traits de construction apparents).

PROBLEME

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$. ($\ln x$ désigne le logarithme népérien de x)

- Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
- Dresser le tableau de variation de la fonction g . (Les limites ne sont pas demandées). Calculer $g(1)$.
- Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unités : 3 cm

sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) .
Y a-t-il une autre asymptote à (C) ? Si oui, donner son équation.
- Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
- En utilisant les résultats précédents, déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f .
- Calculer les coordonnées du point d'intersection entre l'asymptote (D) et la courbe (C) .
Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .
- Tracer dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C) et les droites (D) .

Corrigé

Exercice 1

1. (E): $y' + 2y = 0$ 1.a. $y = ce^{-2x}$ est la solution générale de E.

1.b. La solution f de (E) est telle que $f(0) = 1$. On a donc $1 = ce^0 = c$ soit $c = 1$.

D'où f est définie par $f(x) = e^{-2x}$.

2.a. La valeur moyenne de f sur $[0; 10]$ est : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$; $\mu = \frac{1}{10-0} \int_0^{10} e^{-2x} dx$

$$\mu = \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^{10} ; \mu = \frac{1}{20} [1 - e^{-20}]$$

2.b $\mu = \frac{1}{n+1-n} \int_n^{n+1} e^{-2x} dx$; $\mu = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_n^{n+1}$; $\mu = \frac{-1}{2} [e^{-2(n+1)} - e^{-2n}]$; $\mu = \frac{1}{2} [e^{-2n} - e^{-2(n+1)}]$

$$\mu = \frac{1}{2} e^{-2n} (1 - e^{-2})$$

$$3. U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n}, \quad U_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) ; \quad U_1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2} ; \quad U_2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-4}$$

3.b. Pour montrer que (U_n) est une suite géométrique il suffit de montrer qu'il existe un réel non nul q tel que $U_{n+1} = q U_n$.

$$U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n} ; \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2(n+1)} ; \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n} \times e^{-2} ; \quad U_{n+1} = U_n \times e^{-2}.$$

Donc (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2})$ et de raison e^{-2}

3.c $U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_{n-1} + U_n = U_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. On a donc

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_{n-1} + U_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \times \frac{1 - e^{-2(n+1)}}{1 - e^{-2}}.$$

$$U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \dots + U_{n-1} + U_n = \frac{1}{2} \times (1 - e^{-2(n+1)})$$

Exercice 2

$$1. Z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{2 + 2i} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{8} + i \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$2. \|z_1\|^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 = 2 + 6 = 8, \quad \|z_1\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et on a}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} ; \text{ d'où } \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3) \right) = 2\sqrt{2} e^{i\pi/3}$$

$$\|z_2\|^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8 ; \quad \|z_2\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ et on a}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 = 2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) \right) = 2\sqrt{2} e^{i\pi/4}.$$

On a donc $|Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$ et on a : $\arg Z = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc $Z = \cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12)$, donc $\cos(\pi/12) = \operatorname{Re}(Z)$ et $\sin(\pi/12) = \operatorname{Im}(Z)$

et on a : $\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Problème

Partie A : Etude du signe de $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$

- La fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$: $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$
 donc la fonction g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
- Tableau de variation de la fonction g .

x	0	
	$+\infty$	
$g'(x)$		+
$g(x)$		

- $g(1) = 1 - 1 + 2 \ln 1 = 0$
- Si $x \leq 1$, alors $g(x) \leq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \leq 0$
 Si $x \geq 1$, alors $g(x) \geq g(1)$ puis que la fonction g est croissante soit $g(x) \geq 0$
 conclusion : sur $]0 ; 1]$, $g(x) \leq 0$ et sur $[1 ; +\infty[$, $g(x) \geq 0$.
 On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

x	0	1	
	$+\infty$		
$g(x)$		- 0 +	

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

1.a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ ([voir formulaire](#)) et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$ et

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

De la dernière limite, on en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

1.b $f(x) - (x - 1) = -\frac{\ln x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; donc la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est

asymptote

oblique à (C) au voisinage de $+\infty$. Il y a une autre asymptote à la courbe (C) (voir 1.a),
 c'est la droite d'équation $x = 0$.

1.c $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$; $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = 1 - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = 1 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$; $f'(x) = \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3}$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

1.d $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $x^3 > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et le signe de $g(x)$ a déjà été trouvé à la partie A : $f'(1) = 0$

1.e Soit x l'abscisse du point d'intersection de l'asymptote (D) et de la courbe (C), on a : $f(x) = x - 1$ soit $\ln x = 0$, par conséquent $x = 1$.

l'ordonnée de ce point est $f(1) = 0$.

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point de coordonnées

$(1 ; 0)$. $f(x) - (x-1)$ est du signe de $-\ln x$ (voir Partie B 1 .b)

Etudions le signe de $-\ln x$:

$-\ln x \geq 0$ si $\ln x \leq 0$ soit $\ln x \leq \ln 1$ d'où $x \leq 1$

sur $]0 ; 1]$, $-\ln x \geq 0$ donc la courbe (C) est au dessus de la droite (D)

sur $[1 ; +\infty[$, $-\ln x \leq 0$ donc la courbe (C) est au dessous de la droite (D)

1. C_f voir graphique

2.a pour tout réel x on a :

$$H'(x) = \frac{1}{x^2}(1 + \ln x) - \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1 + \ln x - 1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} = h(x)$$

donc H est une primitive de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$

$$2.b \quad H(\sqrt{e}) = \frac{-1}{\sqrt{e}}(1 + \ln \sqrt{e}) = \frac{-1}{\sqrt{e}} \left(1 + \frac{1}{2} \ln e \right) = \frac{-3}{2\sqrt{e}} \quad H(1) = -(1 + \ln 1) = -1,$$

$$H(\sqrt{e}) - H(1) = \frac{-3}{2\sqrt{e}} + 1$$

x	0	1		
	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$+\infty$ $+\infty$	↗ 0	

