PROF :	CHAPITRE : COMPLEXES-PROBABILITE	ISTAS
	DEVOIR SURVEILLE N° DE MATHEMATIQUES	DUREE

EXERCICE 1

Dans cet exercice toutes les probabilités sont données sous forme de fraction.
Une urne contient des boules de couleur numérotées.
-Une boule blanche numérotée 1, que l'on note B_1 ;
- Deux boules rouges numérotées 2 et 3 , que l'on note R_2 et R_3 ;
- trois boules vertes numérotées 1 ; 2 et 3 , que l'on note V_1 , V_2 et V_3.
Les boules sont indiscernables au toucher.
1. On extrait une boule de l'urne , puis une deuxième, sans avoir remis dans l'urne.
On appelle résultat un couple dont le premier élément est la boule obtenue au premier tirage, et le second celle obtenue au second tirage.
Par exemple $(R_2;V_3)$ est un résultat ; il signifie que la première boule est rouge numérotée 2 et que la deuxième boule est verte numérotée 3.
Pour répondre aux questions posées on peut s'aider d'un arbre ou d'un tableau.

a. Déterminer le nombre de résultats possibles.
b. On admet que tous les tirages sont équiprobables. Calculer la probabilité de chacun des événements
Suivants :

A : « Les deux boules sont de la même couleur. »
B : « le produit des numéros inscrits sur les boules est 6. »
C : « Il y a au moins une boule blanche . »

2. Un jeu consiste à tirer 2 boules de l'urne , selon la méthode décrite dans la question 1.
On note X la variable aléatoire qui associe , à chaque résultat, produit des numéros inscrits sur les deux boules .
Exemple : on associe au tirage $(B_1;V_2)$ le nombre 2 car $1\times 2 = 2$.

a. Donner toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X .
b. Montrer que la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 9 est égale à $\frac{1}{15}$
c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.
d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

PROBLEME 1

Partie A Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que : $g'(x) = \frac{2x^2+3x+4}{x}$,puis dresser le tableau de variations de g sur $]0;+\infty[$.
3. Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$ .On appelle ($\boldsymbol{C}_f$) la courbe de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Déterminer la limite de f en 0 ; on remarquera que : $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$. Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$
Donner les solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$ de l'équation f(x) = x.

4. Tracer ($\mathcal{C}_f$) et la droite d'équation y = x.
5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe ($\mathcal{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e.
a. Hachurer le domaine (D).
b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm². On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm² près

Corrigé

EXERCICE 1

1. Tableau traduisant la situation :

1ère boule / 2ième boule	B_1	R_2	R_3	V_1	V_2	V_3
B_1		$(B_1 ; R_2)$	$(B_1 ; R_2)$	$(B_1 ; V_1)$	$(B_1 ; V_2)$	$(B_1 ; V_3)$
R_2	$(R_2 ; B_1)$		$(R_2 ; R_3)$	$(R_2 ; V_1)$	$(R_2 ; V_2)$	$(R_2 ; V_3)$
R_3	(R3 ; B_1)	$(R_3 ; R_2)$		$(R_3 ; V_1)$	$(R_3 ; V_2)$	$(R_3 ; V_3)$
V_1	$(V_1 ; B_1)$	$(V_1 ; R_2)$	$(R_3 ; V_1)$		$(V_1 ; V_2)$	$(V_1 ; V_3)$
V_2	$(V_2 ; B_1)$	$(V_2 ; R_2)$	$(V_2 ; R_3)$	$(V_2 ; V_1)$		$(V_2 ; V_3)$
V_3	$(V_3 ; B_1)$	$(V_3 ; R_2)$	$(V_3 ; R_3)$	$(V_3 ; V_1)$	$(V_3 ; V_2)$	

a. Le nombre de résultats possibles est $6\times5=30$

b. A : « Les deux boules sont de la même couleur. ». L'événement A correspond à :

A={$(R_2 ; R_3)$/ $(R_3 ; R_2)$/ $(V_1 ; V_2)$ / $(V_1 ; V_3)$/ $(V_2 ; V_1)$/ $(V_2 ; V_3)$/ $(V_3 ; V_1)$/ $(V_3 ; V_2)$}

Donc $p(A)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

B : « Le produit des numéros inscrits sur les boules est 6. »L'événement B correspond à :

B={$(R_2 ; R_3)$/ $(R_3 ; R_2)$/ $(R_2 ; V_3)$ / $(R_3 ; V_2)$/ $(V_2 ; V_3)$ / $(V_3 ; V_2)$}.

Donc $p(B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=0,2$

C : « Il y a au moins une boule blanche. » . L'événement C correspond à :

C ={ $(B_1 ; R_2)$/ $(B_1 ; R_2)$/ $(B_1 ; V_1)$ / $(B_1 ; V_2)$/ $(B_1 ; V_3)$/ $(R_2; B_1)$/ $(R_3; B_1)$/ $(V_1 ; B_1)$/ $(V_2 ; B_1)$/ $(V_3 ; B_1)$ }. Donc $p(C)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

2. a. Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X sont : $X=\{1;2;3;4;6;9\}$.

b. $(X=9)$ correspond au cas : $(R_3 ; V_3)$ et $(V_3 ; R_3)$. Donc $p(X=9)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$.

c. $(X=1)$ correspond au cas : $(B_1 ; V_1)$/ $(V_1 ; B_1)$, donc $p(X=1)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

$(X=2)$ correspond au cas : $(B_1 ; R_2)$/ $(R_2; B_1)$/ $(B_1 ; V_2)$ / $(R_2 ; V_1)$/ $(V_1 ; R_2)$ / $(V_1 ; V_2)$ /$(V_2 ; B_1)$ /$(V_1 ; V_2)$. $p(X=2)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

$(X=3)$ correspond au cas : $(B_1 ; V_3)$ / $(V_3 ; B_1)$/ (R3 ; B_1) / $(R_3 ; V_1)$ / $(V_1 ; V_3)$ / $(V_1 ; V_3)$/$(V_3 ; B_1)$/$(V_3 ; V_1)$. $p(X=3)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

$(X=4)$ correspond au cas : $(V_2 ; R_2)$ / $(R_2 ; V_2)$. $p(X=4)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ $(X=6)$ correspond au cas : $(R_2 ; R_3)$/ $(R_3;V_2)$/$(R_2 ; V_3)$ /$(R_3 ; R_2)$ / $(V_3 ; R_2)$/ $(V_2 ; R_3)$ /$(V_2 ; V_3)$ /$(V_3 ; V_2)$. $p(X=6)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$

$(X=9)$ correspond au cas : $(R_3 ; V_3)$ et $(V_3 ; R_3)$. $p(X=9)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$

Loi de probabilité de la variable aléatoire X **:**

$X=x_i$	1	2	3	4	6	9

$P\left(X=x_i\right)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

d. Espérance mathématique de la variable aléatoire X :

$E\left(X\right)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{4}{15}+4\times\frac{1}{15}+6\times\frac{4}{15}+9\times\frac{1}{15}=\frac{58}{15}\approx 3{,}87$.

PROBLEME 1

Partie A

1. $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+3x-4\right)=-4$; $\lim\limits_{x\to 0}4\ln x=4\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x-4\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4\ln x=4\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

2. Soit g' la dérivée de g. $g'(x)=2x+3+\frac{4}{x}=\frac{2x^2+3x+4}{x}$

3. g'(x) est du signe de $2x^2+3x+4$, calculons les racines de ce polynôme :

$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times2\times4=9-32=-23<0$, donc $2x^2+3x+4$ n'a pas racine et reste toujours strictement positif, (prendre le signe de $a=2$) par conséquent g'(x) > 0 sur]0 ; + ∞[, il en résulte que g est croissante sur]0 ; + ∞[

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	+
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0	$+\infty$

4. g(1) = 1 + 3 - 4 + 4 ln 1 = 0 donc g(x) < 0 sur]0 ; 1[et g(x) > 0 sur]1;+ ∞[.

x	0		1	$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	+

Partie B

1. a. limite de f en + ∞.

$f(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}3\ln x=3\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}4\frac{\ln x}{x}=4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b. la limite de f en 0 ; $f(x)=x+\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x$: $x+\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}=f(x)$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{-4}{x}=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(3-\frac{4}{x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to0}\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x=+\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to0}x=0$

On peut en déduire que la droite d'équation x = 0 est asymptote à (C)

2. a. Pour tout x strictement positif : $f(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}$

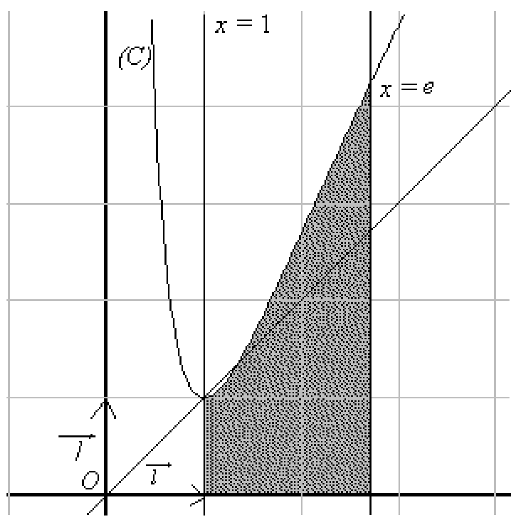
$$f'(x)=1+\frac{3}{x}-4\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=1+\frac{3}{x}-4\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2+3x-4(1-\ln x)}{x^2}=\frac{x^2+3x-4+4\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b. f '(x) est du signe de g(x) dont le signe a été trouvé Partie A 4.

c. $f(1)=1+3\ln1-4\frac{\ln1}{1}=1$

x	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	+
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘		↗ $+\infty$



3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f(x)=x \Leftrightarrow x+\left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x = x \Leftrightarrow \left(3-\frac{4}{x}\right)\ln x = 0$

$3-\frac{4}{x}=0$ et $\ln x = 0$ $\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$ *ou* $x=1$, donc $S=\left\{1;\frac{4}{3}\right\}$.

4. voir graphique
5. La droite d'équation y = x coupe la courbe (C) en deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4/3 ; 4/3)

Partie C

1. $F(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3x\ln x-2(\ln x)^2$; $F'(x)=x-3+3\ln x+3-2\times 2\frac{\ln x^2}{x}$ et on a :

$F'(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}= f(x)$. donc F est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. a.

b. $\int_1^e f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^e=F(e)-F(1)=\frac{e^2}{2}-3e+3e\ln e-2(\ln e)^2-\left(\frac{1}{2}-3\right)=\left(\frac{e^2}{2}-2+\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{e^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)$

$1u.a=3^2=9cm^2$, donc $A=9\times\frac{1}{2}\left(e^2+1\right)=\frac{9}{2}\left(e^2+1\right)cm^2\approx 37,75cm^2$