TEST D'EXCELLENCE ISTAS 2012 : Tle

PROBLEME

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire f

La fonction f est définie sur R par : $f(x) = e^{-x} - x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f
   Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0 ; l].
   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
4. Préciser le signe de f(x) sur l'intervalle [0 ; l].

Partie B : Étude d'une fonction g et représentation graphique

La fonction g est définie sur $]-\infty; \alpha[$ par : $g(x) = \dfrac{x}{e^{-x} - x}$ (où α désigne le nombre réel trouvé à la partie B) et on note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a) Vérifier que, pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$ $g(x) = \dfrac{xe^x}{1 - xe^x}$
   b) En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α. Interpréter graphiquement cette limite.
3. a) La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$:

$$g'(x) = \frac{e^{-x}(x+1)}{(e^{-x} - x)^2}$$

   b) En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty; \alpha[$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.
4. Tracer la courbe représentative C_g de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie

Partie C: Calcul de Faire d'une partie du plan

La représentation graphique C de la fonction f, dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est tracée sur la feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie D limitée par la courbe C l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie D du plan.

PROBLÈME 1. (11 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. L' équation $y' + y = 0$ est de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$, or on sait que les solutions de cette équation sont des fonctions *y* définies par $y = k\,e^{ax} = k\,e^{-x}$ où k est une constante réelle quelconque.

b) *h* est une solution de l'équation $y' + y = 0$ donc *h* est de la forme : $h(x) = k\,e^{-x}$

$h(1) = 1/e$ d'où $k\,e^{-1} = \dfrac{k}{e} = \dfrac{1}{e}$ par conséquent *k* = 1. La fonction *h* est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}$.

2. $u(x) = e^{-x} + ax$ donc pour tout réel *x* on a : $u'(x) = -e^{-x} + a$. de $u' + u = -x - 1$ on en déduit que pour tout réel *x* .

On a : $-e^{-x} + a + e^{-x} + ax = ax + a = -x - 1$ soit encore : $ax + a = -x - 1$ par identification : *a* = -1.

La fonction *u* définie sur R par $u(x) = e^{-x} - x$ est solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire f

1. $f(x)=e^{-x}-x$

1. a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\end{array}\right\} donc \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

1. b.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty\end{array}\right\} donc \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

2. Pour tout réel x on a : $f'(x)=-e^{-x}-1<0$ comme somme de deux nombres strictement négatif sur R

f est donc strictement décroissante sur R :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

3. a) $f(0)=e^{0}-0=1>0$ et $f(1)=e^{-1}-1=-1+1/e<0$ <0

donc on a $f(0)>0>f(1)$ de plus la fonction est dérivable

et strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; l] par conséquent :

l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1]

b) $f(0{,}56)>0>f(0{,}57)$ donc $0{,}56<\alpha<0{,}57$ est un encadrement de α d'amplitude 0,01.

4. *f* est strictement décroissante sur [0 ; l] et $f(\alpha)=0$ par conséquent on en déduit le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [0 ; l] : Si x appartient à $[0\,;\,\alpha[$ alors $f(x)>0$ .Si x appartient à $]\alpha\,;\,1]$ alors $f(x)<0$

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

1. Voir figure :

2. L'aire D est délimité par les droites d'équation $x=0$; $x=\alpha$, la courbe C_f et l'axe des abscisses.

Sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$; f (x) ≥0 donc l'aire de la partie D en unités d'aire est donnée par :

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx=\left[-e^{x}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\alpha}\times u.a=\left(-e^{-\alpha}-\frac{\alpha^2}{2}+e^{0}\right)u.a=\left(1-e^{-\alpha}-\frac{\alpha^2}{2}\right)\times u.a$$

On peut aller plus loin sachant que $f(\alpha)=0$ c'est-à-dire $e^{-\alpha}-\alpha=0\Leftrightarrow e^{-\alpha}=\alpha$;

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx=\left(1-\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)\times u.a$$

Partie D :

Étude d'une fonction g et représentation graphique

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-1}{e+1}$	↗	$+\infty$

1. a) Pour tout x ∈ $]-\infty;\alpha[$: $g(x)=\dfrac{x}{e^{-x}-x}=\dfrac{xe^{x}}{(e^{-x}-x)e^{x}}=\dfrac{xe^{x}}{1-xe^{x}}$

b) $g(x)=\dfrac{x}{e^{-x}-x}=\dfrac{xe^{x}}{1-xe^{x}}$; $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(1-xe^{x})=1\end{array}\right\} donc \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

donc la droite d'équation y = 0 est une asymptote horizontale à la courbe Cg en $-\infty$.

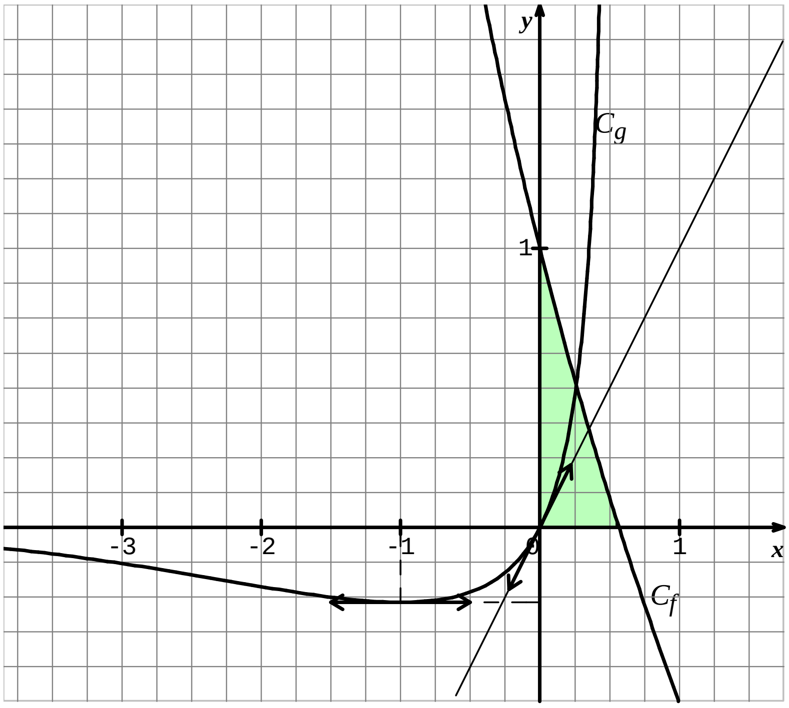
2. $g(x)=\dfrac{x}{e^{-x}-x}=\dfrac{x}{f(x)}$; $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\alpha} x=\alpha>0\\ \left.\begin{array}{l}x\in[0;\alpha]\\ \lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} f(x)=0^{+}\end{array}\right\}\\ \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0\end{array}\right\} donc \lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} g(x)=+\infty$

Interprétation graphique : la droite d'équation x = α est asymptote à la courbe Cg

3. a) Pour tout x ∈ $]-\infty;\alpha[$: $g(x)=\dfrac{x}{e^{-x}-x}=\dfrac{x}{f(x)}$ $\quad g'(x)=\dfrac{f(x)-xf'(x)}{f(x)^2}=\dfrac{e^{-x}-x-x(-e^{-x}-1)}{(e^{-x}-x)^2}=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x}-x)^2}$

b) g'(x) est du signe de $1+x$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ car $(e^{-x}-x)^2>0$ et $e^{-x}>0$ sur $]-\infty\,;\,\alpha[$: $1+x>0$ si $x>-1$

.On en déduit que sur $]-\infty\,;-1]$, $f'(x)\le 0$ donc f décroissante et sur $[-1;\alpha[$, $f'(x)\ge 0$ donc *f* croissante .



y
x
1
-3
-2
-1
0
1
C_g
C_f