LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN NIVEAU : Terminale D	DEVOIR DE MATHEMATIQUES Durée : 4h	Année scolaire 2020-2021 11/02/2021

EXERCICE 1 (2 *points*)

Ecris sur ta copie le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	$Si\ z = (1-\sqrt{5})\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$ alors un argument de z est $\frac{\pi}{3}$
2	Pour tous nombres complexes $z\ et\ z'$, $\lvert z\rvert = \lvert z'\rvert$ équivaut à $z = z'$ ou $z = -z'$
3	$f\ et\ g\ sont\ des\ fonctions\ telles\ que\ si\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\ et\ \lim_{x\to 2} g(x) = +\infty\ alors\ \lim_{x\to+\infty} fog(x) = 2$
4	La fonction $x \mapsto 2 + cos^5x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -5sinxcos^5x$

EXERCICE 2 (2 *points*)

Pour chaque affirmation du tableau, choisis la bonne réponse.

N°	Affirmation	Réponses		
		a	b	c
1	X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 5\ et\ p = 0,62$. La probabilité à 10^{-3} près de l'événement $X \geq 1$ est égale à :	0,8	0,908	0,992
2	On admet que $\forall x \epsilon]0;10], f'(x) = lnx - \frac{x}{2} + 1$ La courbe (C_f) admet sur l'intervalle $]0;10]$ un point d'inflexion d'abscisse :	1,2	0,9	2
3	$Le\ nombre\ complexe\ u = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ est\ une$	racine huitième de l'unité	racine sixième de l'unité	racine quatrième de l'unité
4	$\lim_{x\to+\infty}\left(xsin\frac{2}{x}\right)\ est\ égale\ à$	0	2	$+\infty$

EXERCICE 3 (3,5 *points*) Commun à tous sauf les classes de TD2 et TD3

I. Ecris sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes $1 + i$ et $\sqrt{3} + i$.

2. On donne le nombre complexe $u = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

a) Ecris u sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique .

$b)$ Déduis – en les valeurs exactes de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\ et\ sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité graphique 3 cm.

A , B et C sont les points d'affixes respectives $1 + i$, $\sqrt{3} + i$ et $1 + i\sqrt{3}$.

a) Justifie que les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b) Déduis-en la construction des points B et C.

c) Démontre que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

d) Démontre que les droites (OA) et (BC) sont perpendiculaires

4. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-\sqrt{3}-i}{z-1-\sqrt{3}i}$.

Détermine l'ensemble (D) des points du plan tels que $\lvert z'\rvert = 1$. Construis (D).

EXERCICE 4 (5 *points*)

I. On considère la fonction g définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$. (en 0 on pourra poser $X = \sqrt{x}$).
2. Etudie la dérivabilité de g en 0. Interprète graphiquement le résultat.
3. a) Démontre que $\forall x \in [0;\ +\infty[, g'(x) = -(2 + \ln x)\ln x$

   b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
4. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0;\ +\infty[$ une unique solution α et que $2 < \alpha < 2{,}1$.

   b) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in [0;\ \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

II. Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x\ln x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 4cm. On admet que $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ 1 + x\ln x > 0$.

1. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interprète graphiquement les résultats.
2. *a*) Démontre que $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1 + x\ln x)^2}$

   b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\alpha}}$
4. Soit h la restriction de f à $]0\ ,\ \alpha]$.

   a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1}.

   b) h^{-1} est $-$ elle dérivable en $\dfrac{1}{1 + \sqrt{\alpha}}$? Justifie ta réponse.
5. Construis (C). On prendra $f(\alpha) = 0{,}3$

EXERCICE 5 (3,5 *points*)

Cinq amis nommés A, B, C, D et E achètent en commun une photocopieuse.

Pour des raisons de surface disponible, cette photocopieuse peut être entreposée chez A ou B.

On procède à un vote à bulletin secret pour savoir chez lequel de A ou de B elle sera entreposée. Chacun des cinq amis fait un choix et un seul sur l'une des deux personnes A ou B.

Le résultat d'un vote noté (A, B, B, A, A) signifie que : A a voté pour A, B a voté pour B, C a voté pour B, D a voté pour A et E a voté pour A.

1. Justifie qu'il y a 32 résultats possibles.
2. On désigne par X la variable aléatoire qui, au résultat de chaque vote, associe le nombre de voix obtenues par A.

   a) Justifie que $p(X = 0) = p(X = 5) = \dfrac{1}{32}$

   b) Etablis la loi de probabilité de X.

   c) Justifie que l'espérance mathématique de X est: $E(X) = \dfrac{5}{2}$

EXERCICE 4 (5 *points*)

I. On considère la fonction g définie sur $[0;\ +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = 1 - x(\ln x)^2 \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$.

1. Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$. (en 0 on pourra poser $X = \sqrt{x}$).
2. Etudie la dérivabilité de g en 0. Interprète graphiquement le résultat.
3. a) Démontre que $\forall x \in [0;\ +\infty[, g'(x) = -(2 + \ln x)\ln x$
   b) Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
4. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0;\ +\infty[$ une unique solution α et que $2 < \alpha < 2{,}1$.
   b) Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in [0;\ \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha;\ +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

II. Soit f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x\ln x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 4cm. On admet que $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ 1 + x\ln x > 0$.

1. Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interprète graphiquement les résultats.
2. *a*) Démontre que $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1 + x\ln x)^2}$
   b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. Démontre que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\alpha}}$
4. Soit h la restriction de f à $]0\ ,\ \alpha]$.
   a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1}.
   b) h^{-1} est − elle dérivable en $\dfrac{1}{1 + \sqrt{\alpha}}$? Justifie ta réponse.
5. Construis (C). On prendra $f(\alpha) = 0{,}3$

EXERCICE 5 (3,5 *points*)

Cinq amis nommés A, B, C, D et E achètent en commun une photocopieuse.

Pour des raisons de surface disponible, cette photocopieuse peut être entreposée chez A ou B.

On procède à un vote à bulletin secret pour savoir chez lequel de A ou de B elle sera entreposée. Chacun des cinq amis fait un choix et un seul sur l'une des deux personnes A ou B.

Le résultat d'un vote noté (A, B, B, A, A) signifie que : A a voté pour A, B a voté pour B, C a voté pour B, D a voté pour A et E a voté pour A.

1. Justifie qu'il y a 32 résultats possibles.
2. On désigne par X la variable aléatoire qui, au résultat de chaque vote, associe le nombre de voix obtenues par A.
   a) Justifie que $p(X = 0) = p(X = 5) = \dfrac{1}{32}$
   b) Etablis la loi de probabilité de X.
   c) Justifie que l'espérance mathématique de X est: $E(X) = \dfrac{5}{2}$