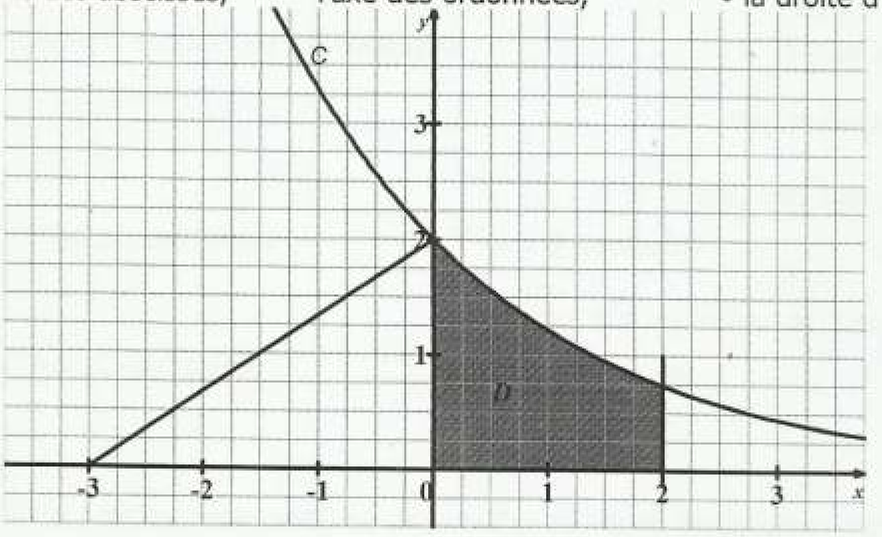
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

I-Pour chacune des questions, une seule des réponses **a, b** ou **c** est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Notation : une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.

On définit la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x)=2e^{-\frac{1}{2}x}$.
Le plan est rapporté au repère orthononnal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
On a tracé, ci-dessous, la courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On note A et B les points de coordonnées respectives (−3 ; 0) et (0 ; 2).
On note D le domaine (hachuré ci-dessous) délimité par :
- la courbe C ,
- l'axe des abscisses,
- l'axe des ordonnées,
- la droite d'équation : x = 2.



1 .
a. La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) :

Réponse a. : (E) : $2y'+y=0$; **Réponse b**. : (E) : $2y'-y=0$; **Réponse c**. : (E) : $y'-y=0$.

(y désigne une fonction inconnue définie sur l' ensemble des nombres réels de variable x ; y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.)

b. La courbe C a pour asymptote la droite d'équation :

Réponse a. : $y=-2x$; **Réponse b** : $x=0$; **Réponse c**. : $y=0$.

2. On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

La valeur V du volume du solide S est donnée par : $V=\pi\int_0^2[f(x)]^2\,dx$ (en unités de volume).

La valeur V du volume du solide S, en cm^2 est égale à :

~~**Réponse a.** : $4\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse b.** : $16\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse c.** :~~
$32\pi\left(1-e^{-2}\right)$.

II.

On considère, les nombres complexes $z_A = 4e^{i\pi/6}$; $z_B = 4e^{-2i\pi/3}$ et $z_C = -2+2i$.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_A \times z_B$ est :
Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B :** un nombre réel négatif
Réponse C : un nombre imaginaire pur

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_A^6$ est :
Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B :** un nombre réel négatif

Réponse C : un nombre imaginaire pur

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est :
Réponse A : $-4e^{i\pi/6}$ **Réponse B :** $4e^{i7\pi/6}$ **Réponse C :** $4e^{-i\pi/6}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :
Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ **Réponse B :** $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ **Réponse C :** $4e^{3i\pi/4}$

<u>EXERCICE 2 : 5 points</u>

Une boîte contient 140 tiges métalliques de forme cylindrique, de dimensions variées, issues de la production d'un atelier. Le tableau suivant dorme leur répartition suivant leur longueur ℓ et leur diamètre d, exprimée en millimètres.

d	15,8	16	16,1	16,3	Total
84	5	9	6	0	
85	15	19	21	4	
86	12	6	12	7	
87	6	7	6	5	
Total					

Par exemple il y a 12 tiges métalliques de longueur 86mm et de diamètre 16,1 mm.
On tire au hasard une tige de la boîte, les tirages étant équiprobables.
Dans tout l'exercice, les probabilités seront données sous forme de fraction.

1. Calculer les probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 des évènements suivants :
a. « obtenir une tige de longueur 86 mm et de diamètre 16mm » ;
b. « obtenir une tige de longueur 85 mm» ;
c. « obtenir une tige de longueur inférieure ou égale à 86mm»

2. Selon les normes imposées par la production, une tige métallique est conforme lorsque sa longueur ℓ et
son diamètre d exprimés en millimètres, vérifient : $84,56 \le l \le 85,5$ et $15,9 \le d \le 16,2$
Calculer la probabilité de l'évènement : « obtenir une tige conforme ».

3. Soit X la variable aléatoire qui à chacun des tirages possibles, associe la longueur en millimètres de la tige obtenue.

a. Quelle est la probabilité de l'évènement "$X = 84$".

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c. Calculer la probabilité de l' évènement "$X \geq 85$".

d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. En donner un arrondi au centième.

PROBLÈME

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = a\ln x + bx + \frac{c}{x}$ où a, b et c sont trois nombres
réels à déterminer. On note f ' la fonction dérivée de la fonction f .

On a représenté la fonction f sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique
2 cm. On note C la courbe représentative de cette fonction f .

On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère.

La tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A :Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable x et des nombres réels a, b et c.
3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c.
4. En utilisant les réponses aux questions 1.et 3., montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système S suivant : $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$
5. Résoudre le système S. En déduire une expression de f (x).

PARTIE B : Étude de la fonction f

Dans la suite du problème la fonction f est définie sur l'intervalle]0 ; ∞[par :
$f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}$

1. Déterminer par calculs la limite de f en +∞ (on peut factoriser f (x) par x).
2. On rappelle que : $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$. En écrivant f (x) sous la forme : $f(x) = \frac{1}{x}\left(8x\ln x - 3x^2 + 4\right)$, déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3.Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle]0 ; ∞[:
$f'(x) = \frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)

b. Montrer que, sur l'intervalle [4 ; 5] l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée α .

c. Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-2} suivant : $4,07 < \alpha < 4,08$.

Partie C : calcul d'une aire

SEMINAIRE DE PREPARATION AU BAC 2014 01710371

SERIE : G_2 **IST ADAMA SANOGO** **SUJET TEST 15**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

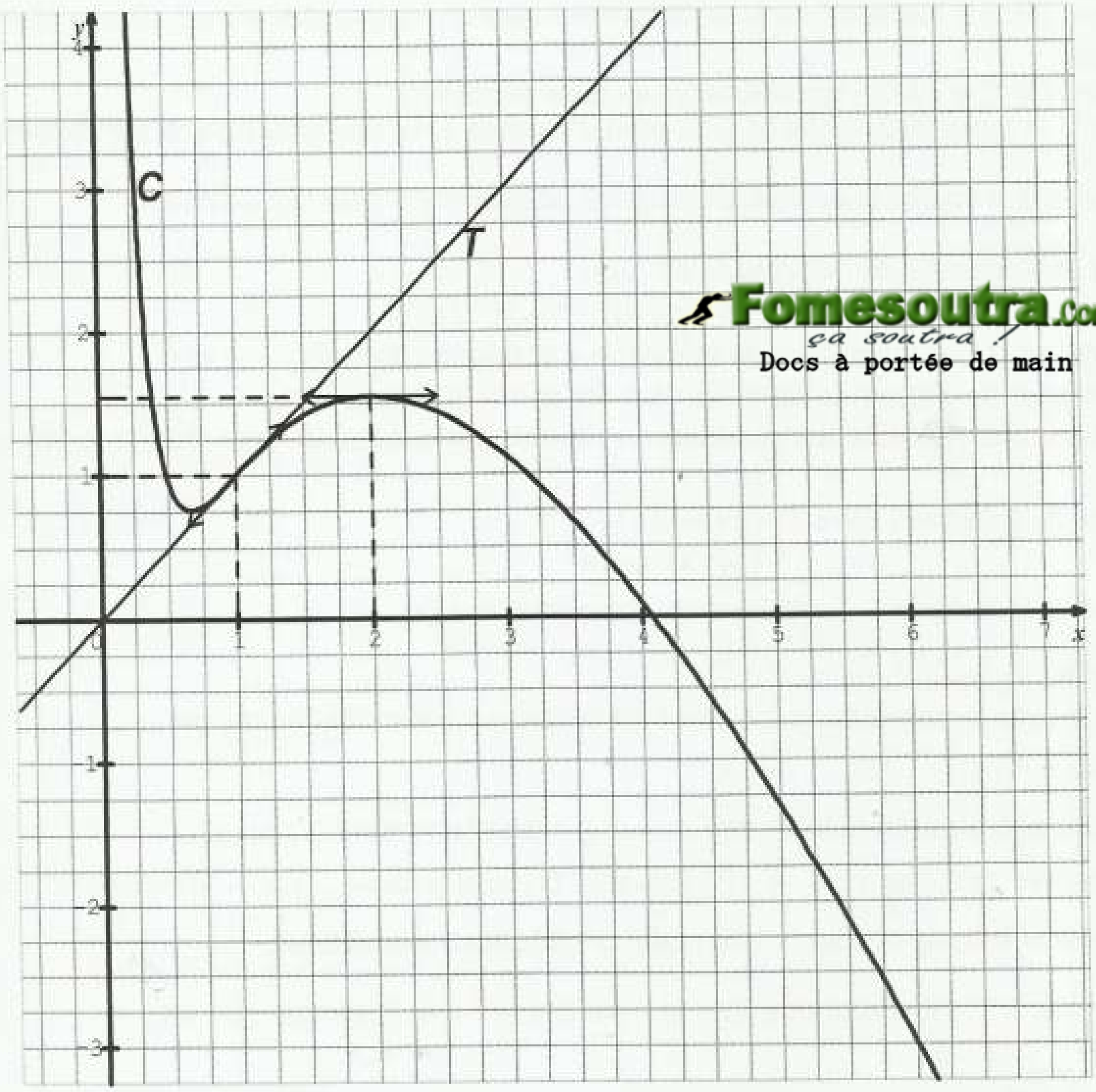
1. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\frac{3}{2}x^2$.

   Calculer $F'(x)$ et en déduire une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. a. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équation x = 1 et x =3.

   b. Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan hachurée ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée a 10^{-2} près.

Annexe – Problème



CORRECTION

Exercice 1

1 .

a. La fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) :

Réponse a. : (E) : $2y'+y=0$; **Réponse b.** : (E) : $2y'-y=0$; **Réponse c.** : (E) : $y'-y=0$.

(y désigne une fonction inconnue définie sur l' ensemble des nombres réels de variable x ; y' désigne la fonction dérivée de la fonction y.)

b. La courbe C a pour asymptote la droite d'équation :

Réponse a. : $y=-2x$; **Réponse b** : $x=0$; **Réponse c.** : $y=0$.

2. On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

La valeur V du volume du solide S est donnée par : $V=\pi\int_0^2[f(x)]^2\,dx$ (en unités de volume).

La valeur V du volume du solide S, en cm^2 est égale à :

Réponse a. : $4\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse b.** : $16\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse c.** : $32\pi\left(1-e^{-2}\right)$.

II.

On considère, les nombres complexes $z_A=4e^{i\pi/6}$; $z_B=4e^{-2i\pi/3}$ et $z_C=-2+2i$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.

1. Le nombre complexe $Z_1=z_A\times z_B$ est :

Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B :** un nombre réel négatif

Réponse C : un nombre imaginaire pur

2. Le nombre complexe $Z_2=z_A^6$ est :

Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B :** un nombre réel négatif

Réponse C : un nombre imaginaire pur

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est :

Réponse A : $-4e^{i\pi/6}$ **Réponse B :** $4e^{i7\pi/6}$ **Réponse C :** $4e^{-i\pi/6}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ **Réponse B :** $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ **Réponse C :** $4e^{3i\pi/4}$.

Exercice 2

d / l	15,8	16	16,1	16,3	Total
84	5	9	6	0	**20**
85	15	**19**	**21**	4	**59**
86	12	**6**	12	7	**37**
87	6	7	6	5	**24**
Total	**38**	**41**	**45**	**16**	**140**

1.a. Soit A = « obtenir une tige de longueur 86 mm et de diamètre 16mm » donc on a : $p_1=\frac{n_A}{n_E}=\frac{6}{140}=\frac{3}{70}$

b. Soit B = « obtenir une tige de longueur 85 mm» ; donc on a : $p_2=\frac{n_B}{n_E}=\frac{59}{140}=\frac{59}{140}$

c. Soit C = « obtenir une tige de longueur inférieure ou égale à 86mm» donc on a :

$p_3 = \frac{n_C}{n_E} = \frac{20+59+37}{140} = \frac{116}{140} = \frac{29}{35}$.

. 2. Selon les normes imposées par la production, une tige métallique est conforme lorsque sa longueur ℓ et
son diamètre d exprimés en millimètres, vérifient : $84,56 \le l \le 85,5$ et $15,9 \le d \le 16,2$
Soit D l'événement « obtenir une tige conforme ». $n_D = 19+21 = 40$, donc on a :

$$p(D) = \frac{n_D}{n_E} = \frac{40}{140} = \frac{2}{7}.$$

3. Soit X la variable aléatoire qui à chacun des tirages possibles, associe la longueur en millimètres de la tige obtenue.
Soit G L'évènement "$X = 84$" signifie que la longueur du tige est égale à 84 cm . or il y a 20 cas favorables . Donc on a $p(X=84) = \frac{20}{140} = \frac{1}{7}$

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = l_i$	84	85	86	87
$p(X = l_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{59}{140}$	$\frac{37}{140}$	$\frac{24}{140} = \frac{6}{35}$

c. Soit H L'évènement "$X \ge 85$" signifie que la longueur du tige est supérieure ou égale à 85 cm .
On constate que H est l'événement contraire de G $H = \overline{G}$, donc

$$p(H) = p(\overline{G}) = 1 - p(G) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

d. $E(X) = 84 \times \frac{20}{140} + 85 \times \frac{59}{140} + 86 \times \frac{37}{140} + 87 \times \frac{24}{140} = \frac{1680+5015+3182+2088}{140} = \frac{11965}{140} = \frac{2393}{28} \approx 85,46$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
$f(1) = 1$; $f'(1) = 1$ puisque le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal à 1 $f'(2) = 0$, puisque la tangente au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses

2. $f(x) = a\ln x + bx + \frac{c}{x}$; $f'(x) = \frac{a}{x} + b - \frac{c}{x^2}$.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c

$f(1) = a\ln 1 + b\times 1 + \frac{c}{1} = b + c$; $f'(1) = \frac{a}{1} + b - \frac{c}{1^2} = a + b - c$

$f'(2) = \frac{a}{2} + b - \frac{c}{2^2} = \frac{a}{2} + b - \frac{c}{4} = \frac{2a+4b-c}{4}$.

4. $f(1) = 1 \Leftrightarrow b + c = 1$; $f'(1) = 1 \Leftrightarrow a + b - c = 1$ $f'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2a+4b-c}{4} = 0 \Leftrightarrow 2a + 4b - c = 0$

et on obtient le système $\begin{cases} b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \\ 2a + 4b - c = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} b + c = 1 \\ a + b - c = 1 \\ 2a + 4b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \quad \times 2 \\ 2a + 5b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 - 2b = 2 - 2(-3) = 2 + 6 = 8. \\ c = 1 - b = 1 - (-3) = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

5. $f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}$

B. 1. $f(x)=x\left(8\frac{\ln x}{x}-3+\frac{4}{x^2}\right)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$, donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8\frac{\ln x}{x}-3+\frac{4}{x^2}\right)=-3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. $f(x)=\frac{1}{x}\left(8x\ln x-3x^2+4\right)$: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-3x^2=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(8x\ln x-3x^2+4\right)=4$ $\quad\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

3. a. $f'(x)=\frac{8}{x}-3-\frac{4}{x^2}=\frac{8x-3x^2-4}{x^2}$, or $(3x-2)(2-x)=6x-3x^2-4+2x=-3x^2+8x-4$,donc

$f'(x)=\frac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

x	0		2/3		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0,76	↗	1,54	↘	$-\infty$

b. La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, elle est aussi strictement décroissante sur l'intervalle $[4;5]\subset[2;+\infty[$, or $f(4)\approx0,09$ et $f(5)\approx-1,324$ de plus $0\in[f(4);f(5)]$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha)=0$ et $\alpha\in[4;5]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a : $f(4,07)=0,0019$ et $f(4,08)\approx-0,01$, donc $4,07<\alpha<4,08$.

C.1. $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\frac{3}{2}x^2$:

$F'(x)=8\ln x+\frac{(8x+4)}{x}-8-3x=8\ln x+8+\frac{4}{x}-8-3x=8\ln x-3x+\frac{4}{x}=f(x)$,par conséquent $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. $A=\left(\int_1^3 f(x)dx\right)u.a=4\times\left[F(x)\right]_1^3=4\left[F(3)-F(1)\right]$

$F(3)=(8\times3+4)\ln3-8\times3-\frac{3}{2}\times9=28\ln3-\frac{75}{2}$ et $F(3)=(8\times1+4)\ln1-8-\frac{3}{2}=0-\frac{19}{2}$

$A=4\left[28\ln3-\frac{75}{2}+\frac{19}{2}\right]=4\left[28\ln3-\frac{56}{2}\right]=4\left(28\ln3-28\right)cm^2\approx11,05cm^2$