DS N°6 OPTIMISATION MATHEMATIQUES TER- STG-CFE-MERC 2008-2009

Exercice 1 : 10 points

L'intendant d'un lycée doit remplacer 300 chaises , 110 tables et 30 bureaux . Ils s'adresse à deux entreprises qui proposent les lots suivants :

L'entreprise A propose des lots de 18 chaises, de 5 tables et 1 bureau pour un prix de 250 €.

L'entreprise B propose des lots de 12 chaises, de 5 tables et 2 bureaux pour un prix de 300 €.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de lots que l'intendant doit acheter à chaque entreprise Pour réaliser une dépense minimale . On note x le nombres de lots achetés à l'entreprise A et y le nombres de lots achetés à l'entreprise B.

1°. Traduire les contraintes sous forme d'un système d'inéquations.

2°. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$: (unité graphique : 1 cm pour 2 unités) .

a. Résoudre graphiquement le système $S:\begin{cases} x+2y \geq 30 \\ x+y \geq 22 \\ 3x+2y \geq 50 \\ x \geq 0 \; et \; y \geq 0 \end{cases}$ avec x et y sont des entiers .

Graphique voir annexe 1

b. En achetant 10 lots A et 11 lots B, toutes les contraintes sont –elles toutes respectées ?. Justifier

c. En achetant 12 lots A et 11 lots B, toutes les contraintes sont –elles toutes respectées ?. Justifier

3°. Ecrire en fonction de x et y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots à l'entreprise A et de y lots achetés à l'entreprise B. puis écrire y en fonction de x et de D .

4°. Tracer dans le même repère la droite D_{7800} correspondant à une dépense de D =7800 €.

Tracer dans le même repère la droite D_{6300} correspondant à une dépense de D =6300 €.

Tracer dans le même repère la droite D_{5900} correspondant à une dépense de D =5900 €.

5°. Soit D_m la droite correspondant à cette dépense minimale.

Déterminer le couple $\left(x;y\right)$ correspondant à cette dépense minimale D_m . Quelle est cette dépense ?.

Exercice 2 : 10 points

Une P.M.E fabrique deux types d'appareil :

L'appareil A nécessite 2 heures de travail dans l'atelier d'électronique et 45 minutes dans l'atelier de montage . 2 puces entrent dans la fabrication de cet appareil ;

L'appareil B nécessite 1 heures et demie de travail dans l'atelier d'électronique et 1 heure dans l'atelier de montage . 1 puces entrent dans la fabrication de cet appareil ;

l'usine reçoit journellement 64 puces . L'atelier d'électronique compte 9 ouvriers et celui de mécanique en compte5 . Chaque ouvrier travaille 8 heures par jours.

L'entreprise réalise un bénéfice de 25 € par appareil A vendu et de 15 € par appareil B vendu.

On suppose que toute la production est vendue. On appelle x le nombre d'appareils A fabriqués et y le nombre d'appareil B fabriqués. Le but de l'exercice est de déterminer les entiers x et y permettant de réaliser chaque jour un bénéfice maximal.

1. a. Déterminer l'inégalité réalisant les contraintes portant sur les puces.

b. procéder de même pour les heures de travail en électronique et mécanique.

c. Vérifier que $(x;y)$ est solution de système suivants : $\begin{cases} 2x+y \leq 64 \\ 2x+1,5y \leq 72 \\ 0,75x+y \leq 40 \\ x \in \mathbb{N} \; et \; y \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. a. On considère le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$: unités graphique : 1 cm pou 4 unités .

Construire les droites D_1 ; D_2 et D_3 d'équations respectives : $y=-2x+64$; $y=-\dfrac{4}{3}x+48$; $y=-\dfrac{3}{4}x+40$.

b. Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $(x;y)$ soient solutions du système (S)

(la partie non hachurée s'appelle : Le polygone des contraintes) .

3.a. Ecrire en fonction de x et y le bénéfice b réalisé par la fabrication de x appareils A et de y appareils B puis écrire y en fonction de x et de b

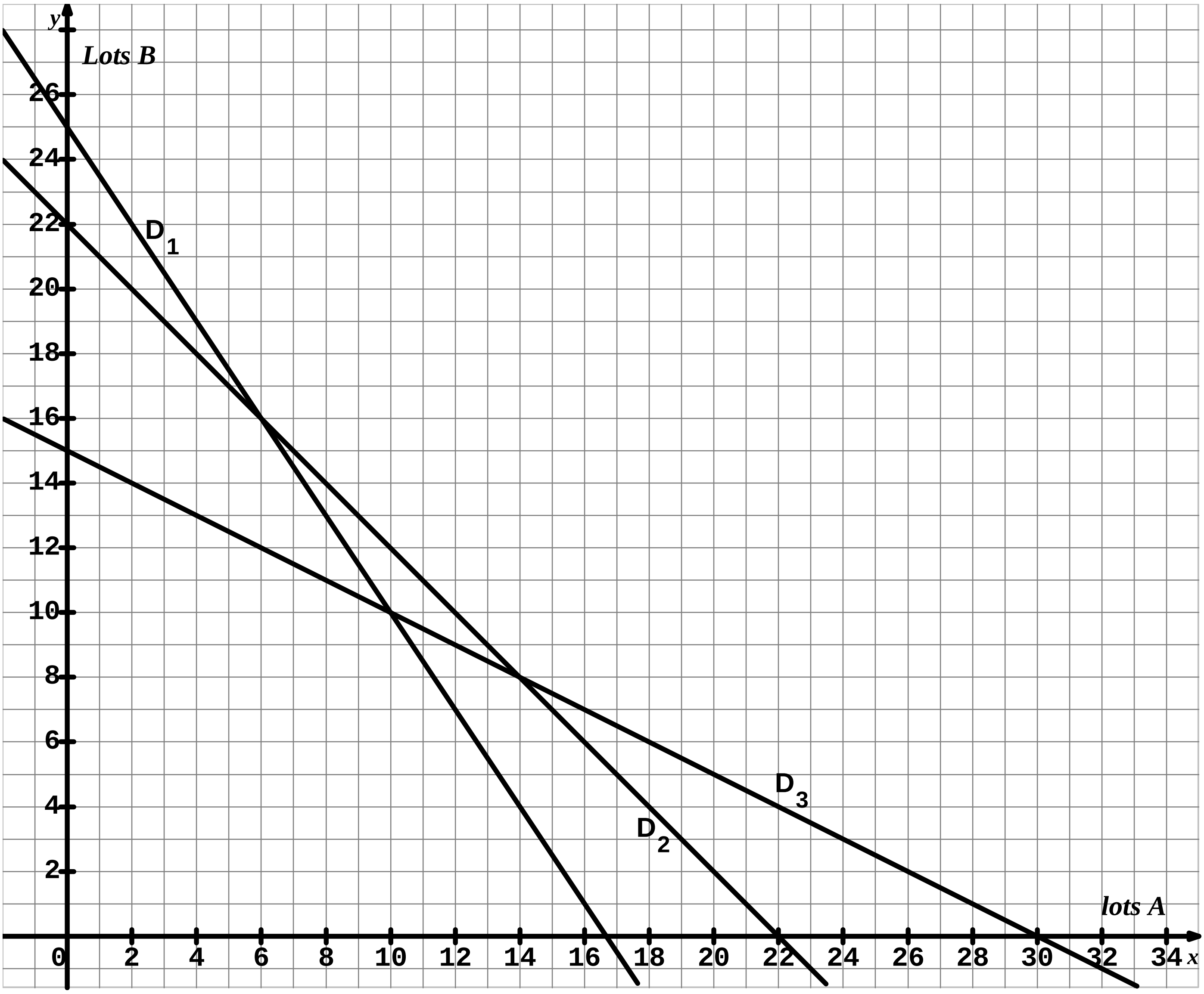
b. l'équation obtenue précédemment est l'équation d'une droite . Tracer la droite D_{300} correspondant à un bénéfice de 300 €.

4. a. Déterminer graphiquement la droite correspondant au bénéfice maximal .

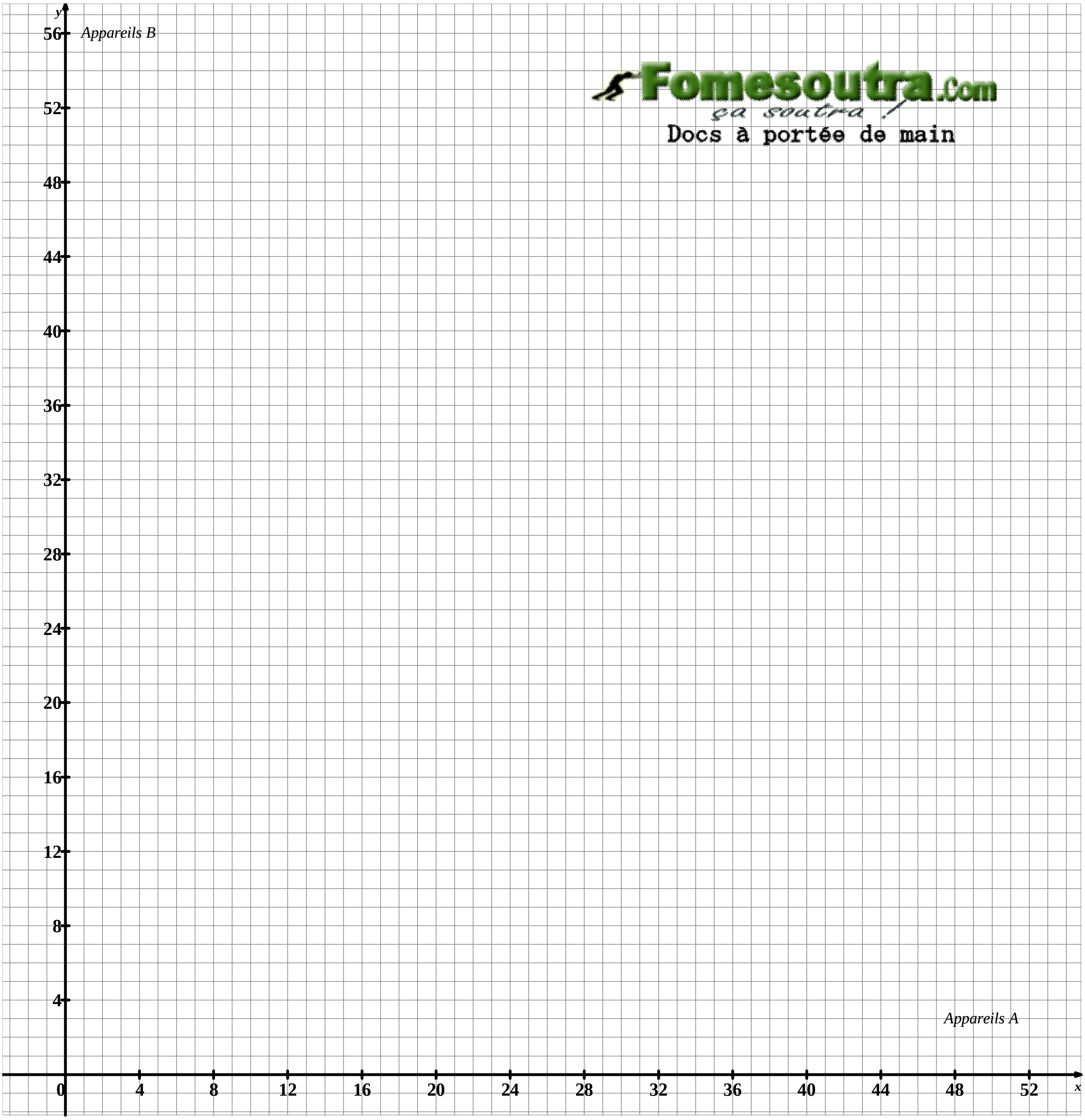
b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites D_1 et D_2.

c. En déduire la valeur du bénéfice maximal .

Exercice 1 annexe 1



Exercice 2 : annexe 2



Correction

Exercice 1 Correction

1°.

	Quantités	Chaises	Tables	Bureaux	Dépenses
Lots A	x	18	5	1	250
Lots B	y	12	5	2	300
Contraintes	$x \in \mathbb{N}$ *et* $y \in \mathbb{N}$	Supérieur à 300	Supérieur à 110	Supérieur à 30	

a) Contrainte concernant les chaises : $18x+12y \geq 300$, soit $3x+2y \geq 50$.

La droite frontière associée à cette contrainte est la droite D_1 d'équation $3x+2y=50$, soit $y=-\frac{3}{2}x+25$.

b) Contrainte concernant les magnolias : $5x+5y \geq 110$. soit $x+y \geq 22$

La droite frontière associée à cette contrainte est la droite D_2 d'équation $x+y=22$, soit $y=-x+22$.

c) Contrainte concernant les camélias : $x+2y \geq 30$.

La droite frontière associée à cette contrainte est la droite D_3 d'équation $x+2y=30$, soit $y=-\frac{x}{2}+15$.

D'où le système des contraintes : $S:\begin{cases} x+2y \geq 30 \\ x+y \geq 22 \\ 3x+2y \geq 50 \\ x \geq 0 \; et \; y \geq 0 \end{cases}$ avec x et y sont des entiers.

2°. Vérifions si le couple (10 ; 11) est solution ou non du système.

Les deux premières inéquations sont vérifiées ($10 \geq 0$ et $11 \geq 0$).

On a : $10+2\times 11=10+22=32 \geq 30$; $3\times 10+2\times 11=30+22=52 \geq 50$ et $10+11=21 \leq 22$

n'est pas valable, donc la 2ème inéquation n'est pas vérifiée.

Donc il n'est pas possible d'accueillir 50 voitures et 20 fourgons.

Graphiquement, on vérifie que le point $M(10;11)$ ne fait pas partie de la zone solution.

Vérifions si le couple $N(12;11)$ est solution ou non du système.

Les deux premières inéquations sont vérifiées ($12 \geq 0$ et $11 \geq 0$).

On a : $12+2\times 11=12+22=34 \geq 30$; $12+11=23 \geq 22$ et $3\times 12+2\times 11=36+22=58 \geq 50$

donc toutes les inéquation sont vérifiée. Donc il est possible d'acheter 12 lots A et 11 lots B .

3°. La dépense occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B est : $D=250x+300y$

et on a : $y=-\frac{5}{6}x+\frac{D}{300}$.

4°. $y=-\frac{5}{6}x+\frac{7800}{300}$, soit $y=-\frac{5}{6}x+26$:

x	0	12
y	26	16

$y=-\frac{5}{6}x+\frac{6300}{300}$, soit $y=-\frac{5}{6}x+21$:

x	0	12
y	21	11

$y=-\frac{5}{6}x+\frac{5900}{300}$, soit $y=-\frac{5}{6}x+\frac{59}{3}$

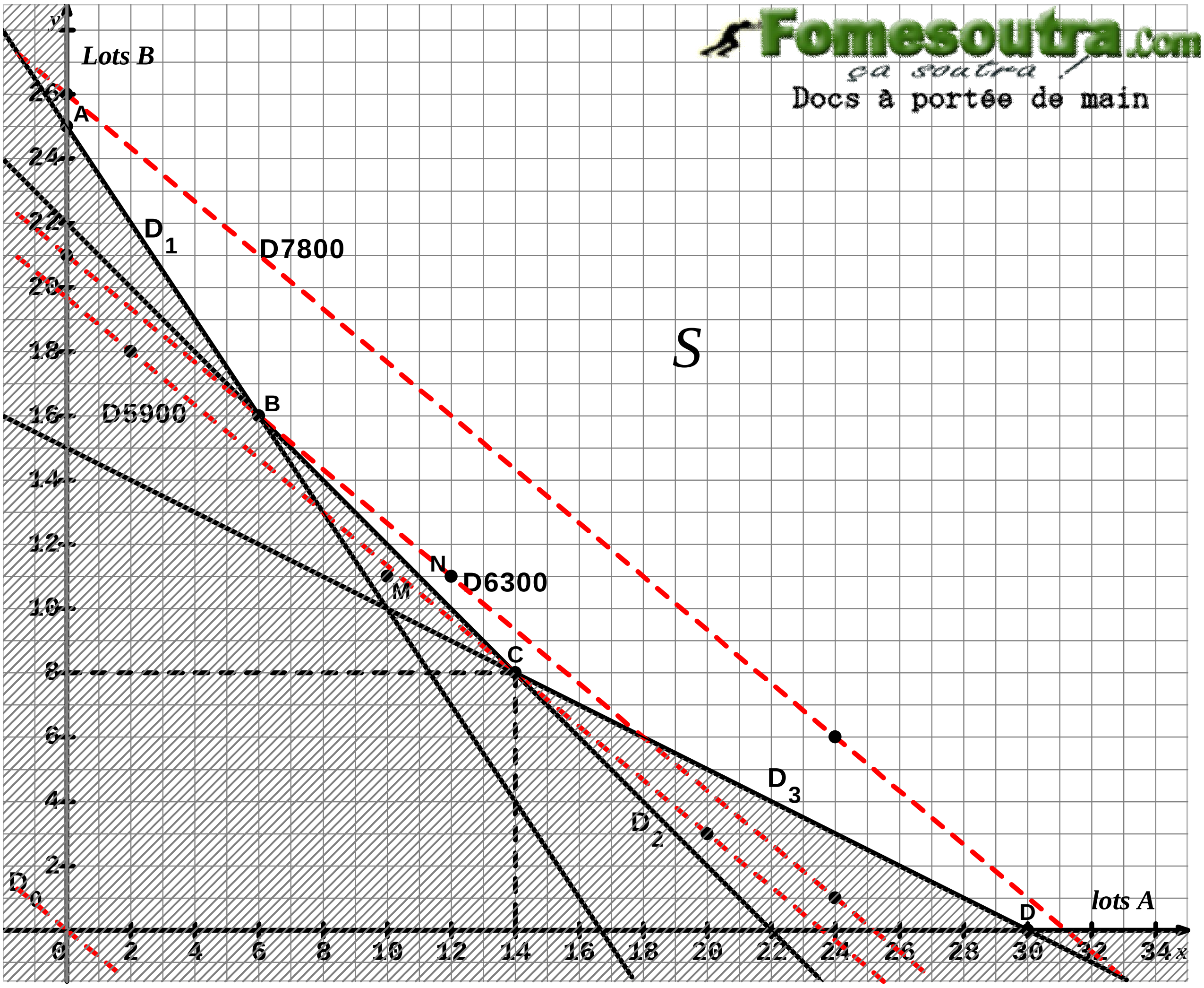
x	2	24
y	18	1

5°. On trace la droite parallèle à D_0, d'ordonnée à l'origine minimale et coupant la région non hachurée en au moins un point de coordonnées entières.

Cette droite passe par le point d'intersection des droites D_2 et D_3 dont les coordonnées sont (14 ; 8).

Il faut donc acheter 14 lots A et 8 lots B pour satisfaire les besoins au coût le plus faible possible.

La dépense minimale est égale à : $D_m=250\times 14+300\times 8=5900$€ .



Exercice 2 Solution

1. Il faut convertir en heures le temps donné en minutes : $45\min = 0,75h$, de plus 1heure et demie est égale à $1,5h$

   Traduction de l'énoncé par un tableau :

	Quantités	Atelier électronique	Atelier mécanique	Puces	Bénéfice
Appareil A	x	2	0,75	2	25
Appareil B	y	1,5	1	1	15
Contraintes	$x \in \mathbb{N}$ *et* $y \in \mathbb{N}$	$8 \times 9 = 72$	$8 \times 5 = 40$	64	b

x appareils A à 2 puces et y appareils B à 1 puce donnent l'inégalité suivante : $2x + y \leq 64$

La droite frontière associée à cette contrainte est la droite D_1 d'équation $2x + y = 64$, soit $y = -2x + 64$.

Dans l'atelier électronique : 8 ouvriers travaillent , donc au total , il y a 72 heures de travail possibles

Dans l'atelier mécanique : 5 ouvriers travaillent , donc au total , il y a 40 heures de travail possibles

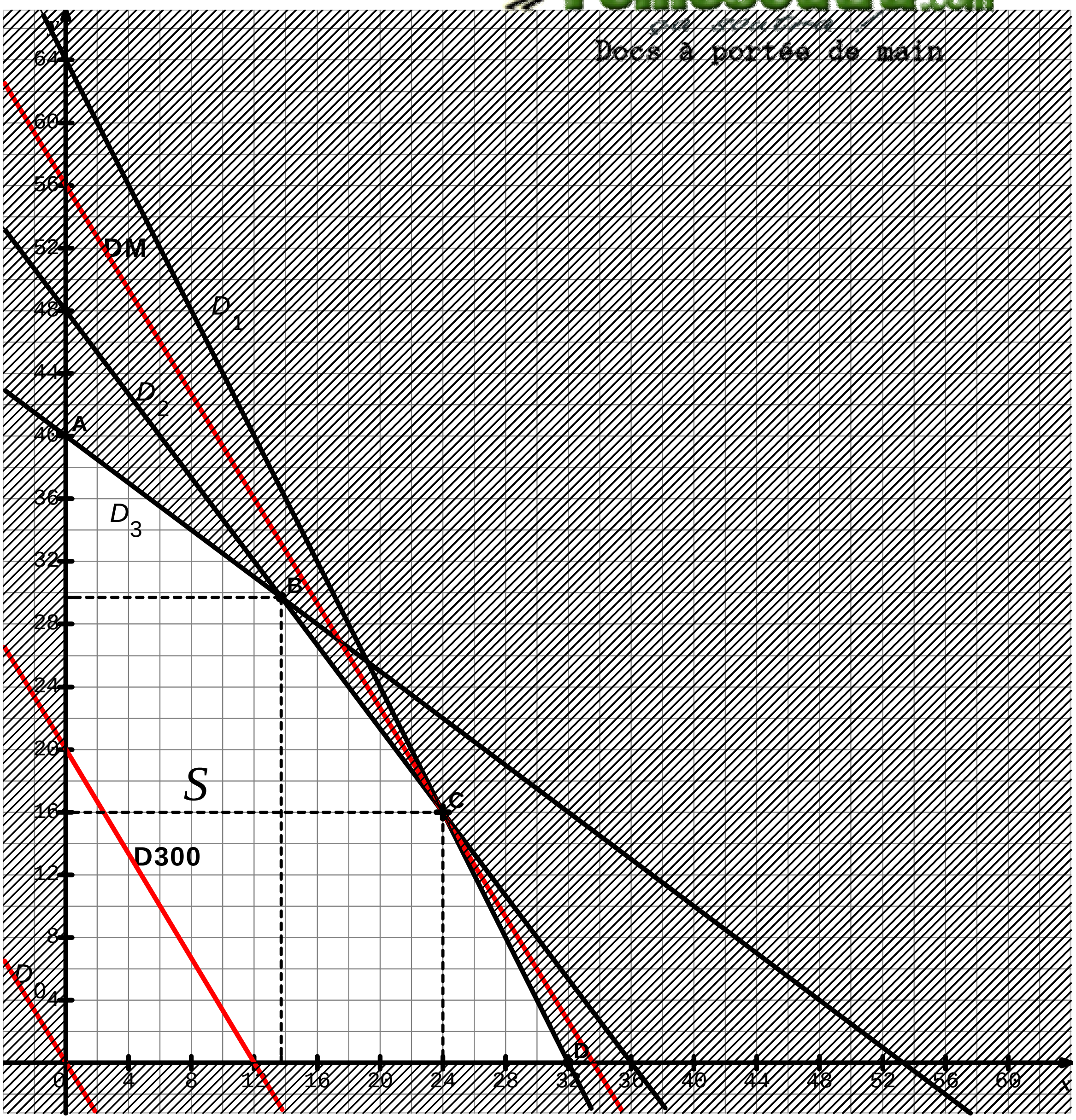
D'où les deux contraintes concernant les heures du travail dans les deux ateliers :

Dans l'atelier électronique on a : $2x + 1,5y \leq 72$. La droite frontière associée à cette contrainte est la droite D_2 d'équation $2x + 1,5y = 72$, soit $y = -\dfrac{4}{3}x + 48$.

Dans l'atelier mécanique on a : $0,75x + y \leq 40$. La droite frontière associée à cette contrainte est la droite D_3 d'équation $0,75x + y = 40$, soit $y = -\dfrac{3}{4}x + 40$.

2. Représentation graphique (voir page suivante)
3. a Si l'entreprise vend x appareils A et de y appareils B, alors le bénéfice réalisé est $b = 25x + 15y$.

   On déduit : $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{b}{15}$.



b. Si $b=300$, alors l'équation devient $y=-\frac{5}{3}x+20$. Ceci est l'équation d'une droite D passant par le point $A(0;20)$ et de coefficient directeur $m=-5/3$.

4. a . Toutes les droites d'équation $y=-\frac{5}{3}x+\frac{b}{15}$ ont même coefficient directeur $m=-5/3$; elles sont donc toutes parallèles entre elles . Plus l'ordonnée à l'origine est grande , plus le bénéfice est grand.
On cherche donc la droite de coefficient directeur $m=-5/3$ ayant une intersection avec le polygone des contraintes et ayant la plus grande ordonnée à l'origine possible .
On constate graphiquement que cette droite est la droite parallèle à D et passant par le point d'intersection des droites D_1 et D_2 .

b. Le point $M(x;y)$ est le point d'intersection des droites D_1 et D_2 si et seulement le couple $(x;y)$ est solution du système : $\begin{cases} y=-2x+64 \\ y=-\frac{4}{3}x+48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+64 \\ -2x+64=-\frac{4}{3}x+48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+64 \\ -2x+\frac{4}{3}x=64+48 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x+64 \\ -\frac{2}{3}x=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\times 24+64=-48+64=16 \\ x=24 \end{cases}$. Ainsi $M(24;16)$.

Pour réaliser un bénéfice maximal , il faut fabriquer 24 appareils de type A et 16 appareils de type B.

c. Le bénéfice réalisé est alors : $b=25\times 24+15\times 16=600+240=840€$.