Exercice 1

Les questions 1., 2., 3. sont indépendantes.

1. On considère le polynôme P défini pour tout réel x par $P(x)=(x-1)(x-3)(2x+3)$

   a. L'équation $P(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions qui sont 1, 3 et $-\dfrac{3}{2}$ ***VRAIE***

   b. Pour tout réel x, $P(x)=2x^3-5x^2-6x$. Puisque $P(x)=2x^3-5x^2-6x+9$ ***FAUX***

   c. L'équation $\left(e^x-1\right)\left(e^x-3\right)\left(2e^x+3\right)=0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$. ***FAUX***

2. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. On considère les nombres $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ et $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$

   a. Les nombres z_1 et z_2 sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-2\sqrt{2}\,z+4=0$.

   Calcul de discriminant $\Delta=2\sqrt{2}\,i$ puis z_1 et z_2 ***VRAIE***

   b. Un argument de z_2 est $-3\pi/4$ ***FAUX***

   c. Le module de z_1 est $\sqrt{2}$. $|z_1|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$ ***FAUX***

3. Soit l'équation différentielle (E) : $4y''+49y=0$ dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa dérivée seconde.

a. La fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=A\cos\left(\dfrac{7x}{2}\right)+B\sin\left(\dfrac{7x}{2}\right)$,où A et B sont deux constantes réelles, est solution de (E). ***VRAIE***

b. La fonction h définie pour tout réel x par $h(x)=3\cos\left(\dfrac{7x}{2}-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ est solution de (E). ***VRAIE***

$h'(x)=-\dfrac{21}{2}\sin\left(\dfrac{7x}{2}-\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $h''(x)=-\dfrac{147}{4}\cos\left(\dfrac{7x}{2}-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et que $h(x)$ et $h''(x)$ vérifie l'équation (E)

c. La fonction k définie pour tout réel x par $k(x)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{7x}{2}\right)-\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{7x}{2}\right)$ est la solution de (E) qui vérifie $k(0)=\sqrt{2}$ et $k'(0)=0$. ($k'(0)=0$ ne convient pas : $B=-\sqrt{2}\neq 0$) ***FAUX***

Exercice 2

1.

	0	1	2
0	(0;0)	(1;0)	(2;0)
1	(0;1)	(1;1)	(2;1)
2	(0;2)	(1;2)	(2;2)
3	(0;3)	(1;3)	(2;3)

b. Calculer la probabilité de l'événement A= « obtenir deux boules portant le même nombre »

$p(A)=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$, puisque le nombre total d'élément de l'univers E est égal à 12

Le nombre de cas favorable à A est égal à 3 : A= $\{(0;0);(1;1);(2;2)\}$

2.

	0	1	2
0	$0-1=-1$	$0-1=-1$	$0-1=-1$
1	$0-1=-1$	$1-1=0$	$2-1=1$
2	$0-1=-1$	$2-1=1$	$4-1=3$
3	$0-1=-1$	$3-1=2$	$6-1=5$

Donc les valeurs prises par la variable aléatoire X sont $\{-1;0;1;2;3;5\}$.

$X=x_i$	-1	0	1	2	3	5
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

c. Calculer la probabilité que le gain du joueur soit strictement supérieur à 2.

$$p(X\geq 2)=p(X=2)+p(X=3)+p(X=5)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

3. Calculer $E(X)$: $E(X)=\sum_{1}^{6}p_ix_i=-1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{12}+3\times\frac{1}{12}+5\times\frac{1}{12}$

$$E(X)=\frac{-6+0+2+2+3+5}{12}=\frac{-6+12}{12}=\frac{6}{12}=0,5$$

$E(X)>0$ .Donc le jeu n'est pas équitable et il est en faveur du joueur

<u>Correction problème</u>

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-8\ln x+8$

1.a la fonction g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a :

$$g(x)=2x-\frac{8}{x}=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x^2-4)}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}.$$

b. pour tout $x\in]0;+\infty[$, $x>0$ et $x+2>0$, donc le signe de $g'(x)$ dépend uniquement de $x-2$.

On déduit que $x-2>0\Leftrightarrow x>2$ sur l'intervalle $]2;+\infty[$ et $x-2<0\Leftrightarrow x<2$ sur l'intervalle $]0;2[$.

D'où le tableau de variation :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$			$g(2)$		

2. $g(2)=2^2-8\ln 2+8=4-8\ln 2+8=12-8\ln 2\approx 6,45$ à 10^{-2} près. La fonction g admet un minimum égal à $g(2)>0$. Donc $g(x)>0$.

Partie B

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2-3x+8\ln x}{x}$.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+8\ln x}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{8\ln x}{x}=x-3+8\frac{\ln x}{x}.$$

2.a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x-3)=-3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{x}\times\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln x=(+\infty)(-\infty)=-\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=8\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=8\times 0=0$ (vu formulaire),

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b. vu que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-\infty$, on déduit que la droite $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe C au voisinage de 0 .

3.a. la fonction f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $f'(x)=\frac{\left(2x-3+\frac{8}{x}\right)\times x-(x^2-3x+8\ln x)}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{2x^2-3x+8-x^2+3x-8\ln x}{x^2}=\frac{x^2+8-8\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b. $x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.
Or d'après la partie A , $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

c.

4. Soit D la droite $y = x-3$.

a. soit $d(x) = f(x) - y = x-3+\dfrac{8\ln x}{x} - (x-3) = \dfrac{8\ln x}{x}$.or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 8 \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 8\times 0 = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-y\right) = 0$. On déduit que la droite D d'équation $y = x-3$ est une asymptote oblique à la courbe C au voisinage de $+\infty$.

b. Soit A le point d'intersection de C et la droite D : $A \in C \cap C \Leftrightarrow f(x) = y$

donc $x-3+8\dfrac{\ln x}{x} = x-3 \Leftrightarrow 8\dfrac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $A \in D \Leftrightarrow y = x_A - 3 = 1-3 = -2$.

Donc le point A a pour coordonnées $(1;-2)$.

c. la position relative de C et D dépend du signe de $d(x) = f(x) - y = \dfrac{8\ln x}{x}$, or $x > 0$,

or $\ln x < 0$ sur $]0;1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$. On déduit que :

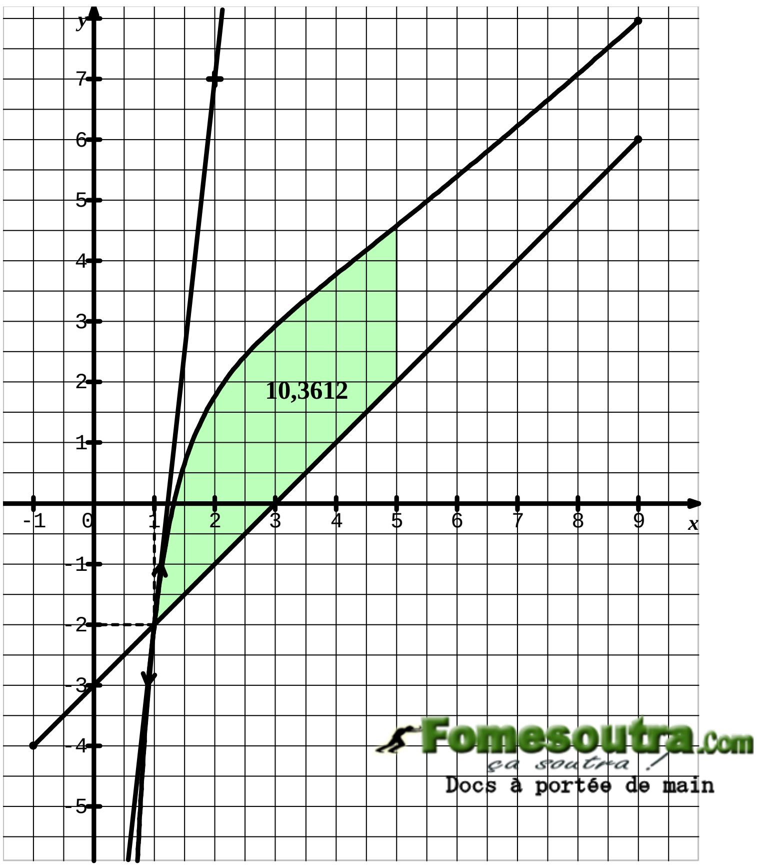
Sur $]0;1[$: $\dfrac{8\ln x}{x} < 0$, donc la courbe C est en dessous de la droite D ($d(x) = f(x) - y < 0$).

sur $]1;+\infty[$: $\dfrac{8\ln x}{x} > 0$, donc la courbe C est au dessus de la droite D. ($d(x) = f(x) - y > 0$).

d. l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est définie par $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

or $f'(1) = \dfrac{1^2+8-8\ln 1}{1^2} = 9$ et $f(1) = \dfrac{1^2-3+8\ln 1}{1} = -2$, donc $y = 9(x-1)-2 = 9x-11$

5. courbe



Partie C

1. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

a. sur $]0;+\infty[$, $H(x) = \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$,

$H(x) = \dfrac{1}{2}u^2$, $H' = \dfrac{1}{2}2u'u$ avec $u = \ln x$ et $u = \dfrac{1}{x}$. Donc $H'(x) = \dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x = \dfrac{\ln x}{x}$ et par conséquent $H(x)$ est une primitive de $h(x)$ sur $]0;+\infty[$.

b. sur $]0;+\infty[$, on a : $f(x) = x-3+\dfrac{8\ln x}{x}$, donc d'après la question précédente on obtient : $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x + 8\times\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

2. a voir graphique ci-dessus

b. sur l'intervalle $[1;5]$, la courbe C est au dessus de la droite D , donc $d(x) = f(x) - y > 0$

donc l'aire de la partie du plan hachurée est $A=\left(\int_1^5 (f(x)-y)dx\right)\times u.a$

$A=\left(\int_1^5 8h(x)dx\right)\times u.a=8\left(\int_1^5 h(x)dx\right)u.a=8\left[H(x)\right]_1^5\times u.a=8\times\frac{1}{2}\left((\ln 5)^2-(\ln 1)^2\right)u.a=4(\ln 5)^2\ u.a$.

Or $1\,u.a=1\,cm^2$. Donc $A=4(\ln 5)^2\ cm^2\approx 10,36cm^2$