| Lycée 9 Avril 1938 Sfax<br>Prof : | Devoir de synthèse n° 2<br>Mathématiques | Classes 3$^{ème}$ Science Technique<br>2008/2009 |
| --- | --- | --- |

***<u>Exercice 1 5 points</u>***

*Cet exercice est un vrai/faux : il s'agit donc de préciser si chacune des affirmations proposées est vraie ou fausse.*
*À chaque bonne réponse est attribuée 0,5 point. Toute réponse incorrecte enlève 0,25 point.*
*L'absence de réponse n'enlève aucun point. En cas de total négatif, la note attribuée à l'exercice sera 0.*

*Pour chaque affirmation, le candidat donnera la réponse sur sa copie en écrivant en toutes lettres « vrai » ou « faux ». On ne demande aucune justification.*



**Les questions 1., 2., 3. sont indépendantes**.

1. On considère le polynôme $P$ défini pour tout réel $x$ par $P(x) = (x-1)(x-3)(2x+3)$

   a. L'équation $P(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions qui sont 1, 3 et $-\dfrac{3}{2}$

   b. Pour tout réel $x$, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

   c. L'équation $\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 3\right)\left(2e^x + 3\right) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

2. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$. On considère les nombres $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ et $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

   a. Les nombres $z_1$ et $z_2$ sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 4 = 0$.

   b. Un argument de $z_2$ est $-3\pi/4$

   c. Le module de $z_1$ est $\sqrt{2}$.

3. Soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 49y = 0$ dans laquelle l'inconnue $y$ est une fonction de la variable réelle $x$ définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $y''$ sa dérivée seconde.

   a. La fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = A\cos\left(\dfrac{7x}{2}\right) + B\sin\left(\dfrac{7x}{2}\right)$, où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles, est solution de (E).

   b. La fonction $h$ définie pour tout réel $x$ par $h(x) = 3\cos\left(\dfrac{7x}{2} - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ est solution de (E).

   c. La fonction $k$ définie pour tout réel $x$ par $k(x) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{7x}{2}\right) - \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{7x}{2}\right)$ est la solution de (E) qui vérifie $k(0) = \sqrt{2}$ et $k'(0) = 0$.

***<u>Exercice 2- 5 points</u>***

On considère deux urnes notées respectivement $U$ et $V$.
L'urne $U$ contient trois boules marquées respectivement : 0, 1 et 2.
L'urne $V$ contient quatre boules marquées respectivement : 0, 1, 2 et 3.
Ces boules sont indiscernables au toucher.
Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule de l'urne $U$ puis une boule de l'urne $V$.
On considère que tous les tirages de ces deux boules sont équiprobables.

1. a. Représenter tous les tirages possibles dans un tableau à double entrée.
   b. Calculer la probabilité de l'événement « obtenir deux boules portant le même nombre » .

2. Un jeu consiste à tirer au hasard une boule de l'urne $U$ , puis une boule de l'urne $V$ .
   Le joueur doit miser 1 € .
   L 'organisateur du jeu remet alors au joueur un montant (en € ) égal au produit des deux nombres figurant sur les deux boules tirées (ce montant peut être nul ).
   On appelle $X$ la variable aléatoire qui, à chaque jeu, associe le gain algébrique (c'est-à-dire positif, nul ou négatif ) du joueur.
   Par exemple, si le joueur tire 2 dans l'urne $U$ , puis 3 dans l'urne $V$ , le gain algébrique du joueur est Alors 5 ; si le joueur tire 0 dans l'urne U, puis 2 dans l'urne $V$ , le gain algébrique du joueur est alors $-1$.

a. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $X$ .



b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ .

c. Calculer la probabilité que le gain du joueur soit strictement supérieur à 2.

d. On note $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ . Calculer $E(X)$.
   On dit qu'un jeu est équitable si l'espérance de gain est nulle. Ce jeu est-il équitable ?

**PROBLÈME 11 points**

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x^2-8\ln x+8$.

1. a. Calculer $g'(x)$.
   b. Étudier le signe de $g'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de $g$ (l'étude des limites de $g$ n'est pas demandée).

2. Donner une valeur approchée de $g(2)$ à $10^{-2}$ près, en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B : étude et représentation graphique d'une fonction

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 1cm. Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+8\ln x}{x}$ et $C$ sa représentation graphique dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout réel $x$ de $]0;+\infty[$ on a : $f(x)=x-3+\dfrac{8\ln x}{x}$.
2. a. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de $f(x)$.

   b. En déduire l'existence d'une asymptote a la courbe $C$ , et en donner une équation.

3. a. Déterminer la dérivée $f'$ de $f$ sur $]0;+\infty[$.
   b. Vérifier que pour tout réel $x$ de $]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le signe de $f'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variations de $f$.

4. Soit D la droite d'équation $y=x-3$.

   a. Montrer que D est asymptote à $C$ en $+\infty$.

b. Calculer les coordonnées du point d'intersection $A$ de $\mathcal{C}$ et de D.

c. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de

d. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1

5. Tracer dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D.



Partie C : calcul d'une aire

1. Soit $h$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

   a. Vérifier qu'une primitive de $h$ sur $]0;+\infty[$ est la fonction $H$ définie par $H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

   b. En déduire une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$.

2. a. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$.

   b. Calculer en $\text{cm}^2$ l'aire de la partie du plan hachurée ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée a $10^{-2}$ près.