Exercice 1

1 .

a. La fonction *f* est une solution de l'équation différentielle (E) :

Réponse a. : (E) : $2y'+y=0$; **Réponse b.** : (E) : $2y'-y=0$; **Réponse c.** : (E) : $y'-y=0$.

(*y* désigne une fonction inconnue définie sur l' ensemble des nombres réels de variable *x* ; *y′* désigne la fonction dérivée de la fonction *y*.)

b. La courbe C a pour asymptote la droite d'équation :

Réponse a. : $y=-2x$; **Réponse b** : $x=0$; **Réponse c.** : $y=0$.

2. On note S le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

La valeur V du volume du solide S est donnée par : $V=\pi\int_0^2[f(x)]^2\,dx$ (en unités de volume).

La valeur V du volume du solide S, en cm^2 est égale à :

Réponse a. : $4\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse b.** : $16\pi\left(1-e^{-2}\right)$; **Réponse c.** : $32\pi\left(1-e^{-2}\right)$.

II.

On considère, les nombres complexes $z_A=4e^{i\pi/6}$; $z_B=4e^{-2i\pi/3}$ et $z_C=-2+2i$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.

1. Le nombre complexe $Z_1=z_A\times z_B$ est :

Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B :** un nombre réel négatif

Réponse C : un nombre imaginaire pur

2. Le nombre complexe $Z_2=z_A^6$ est :

Réponse A : un nombre réel positif **Réponse B :** un nombre réel négatif

Réponse C : un nombre imaginaire pur

3. Le nombre complexe conjugué de z_A est :

Réponse A : $-4e^{i\pi/6}$ **Réponse B :** $4e^{i7\pi/6}$ **Réponse C :** $4e^{-i\pi/6}$

4. Le nombre complexe z_C peut se mettre sous la forme :

Réponse A : $2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ **Réponse B :** $2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ **Réponse C :** $4e^{3i\pi/4}$.

Exercice 2

d *l*	15,8	16	16,1	16,3	Total
84	5	9	6	0	**20**
85	15	**19**	**21**	4	**59**
86	12	**6**	12	7	**37**
87	6	7	6	5	**24**
Total	**38**	**41**	**45**	**16**	**140**

1.a. Soit A = « obtenir une tige de longueur 86 mm et de diamètre 16mm » donc on a : $p_1=\frac{n_A}{n_E}=\frac{6}{140}=\frac{3}{70}$

b. Soit B = « obtenir une tige de longueur 85 mm» ; donc on a : $p_2 = \frac{n_B}{n_E} = \frac{59}{140} = \frac{59}{140}$

c. Soit C = « obtenir une tige de longueur inférieure ou égale à 86mm» donc on a :
$p_3 = \frac{n_C}{n_E} = \frac{20+59+37}{140} = \frac{116}{140} = \frac{29}{35}$.

. 2. Selon les normes imposées par la production, une tige métallique est conforme lorsque sa longueur ℓ et son diamètre d exprimés en millimètres, vérifient : $84,56 \leq l \leq 85,5$ et $15,9 \leq d \leq 16,2$

Soit D l'événement « obtenir une tige conforme ». $n_D = 19+21 = 40$, donc on a : $p(D) = \frac{n_D}{n_E} = \frac{40}{140} = \frac{2}{7}$.

3. Soit X la variable aléatoire qui à chacun des tirages possibles, associe la longueur en millimètres de la tige obtenue.
Soit G L'évènement "$X = 84$" signifie que la longueur du tige est égale à 84 cm . or il y a 20 cas favorables . Donc on a $p(X=84) = \frac{20}{140} = \frac{1}{7}$

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = l_i$	84	85	86	87
$p(X = l_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{59}{140}$	$\frac{37}{140}$	$\frac{24}{140} = \frac{6}{35}$

c. Soit H L'évènement "$X \geq 85$" signifie que la longueur du tige est supérieure ou égale à 85 cm .
On constate que H est l'événement contraire de G $H = \overline{G}$, donc $p(H) = p(\overline{G}) = 1 - p(G) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

d. $E(X) = 84 \times \frac{20}{140} + 85 \times \frac{59}{140} + 86 \times \frac{37}{140} + 87 \times \frac{24}{140} = \frac{1680+5015+3182+2088}{140} = \frac{11965}{140} = \frac{2393}{28} \approx 85,46$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
$f(1) = 1$; $f'(1) = 1$ puisque le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal à 1
$f'(2) = 0$, puisque la tangente au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses

2. $f(x) = a\ln x + bx + \frac{c}{x}$; $f'(x) = \frac{a}{x} + b - \frac{c}{x^2}$.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c

$f(1) = a\ln 1 + b \times 1 + \frac{c}{1} = b + c$; $f'(1) = \frac{a}{1} + b - \frac{c}{1^2} = a + b - c$

$f'(2) = \frac{a}{2} + b - \frac{c}{2^2} = \frac{a}{2} + b - \frac{c}{4} = \frac{2a+4b-c}{4}$.

4. $f(1) = 1 \Leftrightarrow b + c = 1$; $f'(1) = 1 \Leftrightarrow a + b - c = 1$ $f'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2a+4b-c}{4} = 0 \Leftrightarrow 2a + 4b - c = 0$

et on obtient le système $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \quad \times 2 \\ 2a+5b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=2-2b=2-2(-3)=2+6=8 \\ c=1-b=1-(-3)=1+3=4 \end{cases}.$$

5. $f(x) = 8\ln x - 3x + \frac{4}{x}$

B.

1. $f(x) = x\left(8\dfrac{\ln x}{x} - 3 + \dfrac{4}{x^2}\right)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$, donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(8\frac{\ln x}{x} - 3 + \frac{4}{x^2}\right) = -3 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty .$$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(8x\ln x - 3x^2 + 4\right)$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -3x^2 = 0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(8x\ln x - 3x^2 + 4\right) = 4$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

3.

a. $f'(x) = \dfrac{8}{x} - 3 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{8x - 3x^2 - 4}{x^2}$, or $(3x-2)(2-x) = 6x - 3x^2 - 4 + 2x = -3x^2 + 8x - 4$,donc

$f'(x) = \dfrac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

x	0		$2/3$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	0,76	↗	1,54	↘	$-\infty$

b. La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, elle est aussi strictement décroissante sur l'intervalle $[4;5] \subset [2;+\infty[$, or $f(4) \approx 0,09$ et $f(5) \approx -1,324$ de plus $0 \in [f(4); f(5)]$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$ et $\alpha \in [4;5]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a : $f(4,07) = 0,0019$ et $f(4,08) \approx -0,01$, donc $4,07 < \alpha < 4,08$.

C.

1. $F(x) = (8x+4)\ln x - 8x - \dfrac{3}{2}x^2$:

$F'(x) = 8\ln x + \dfrac{(8x+4)}{x} - 8 - 3x = 8\ln x + 8 + \dfrac{4}{x} - 8 - 3x = 8\ln x - 3x + \dfrac{4}{x} = f(x)$,par conséquent $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2.

$$A = \left(\int_1^3 f(x)dx\right)u.a = 4\times\left[F(x)\right]_1^3 = 4\left[F(3) - F(1)\right]$$

$F(3) = (8\times3+4)\ln 3 - 8\times3 - \dfrac{3}{2}\times9 = 28\ln 3 - \dfrac{75}{2}$ et $F(3) = (8\times1+4)\ln 1 - 8 - \dfrac{3}{2} = 0 - \dfrac{19}{2}$

$$A = 4\left[28\ln 3 - \frac{75}{2} + \frac{19}{2}\right] = 4\left[28\ln 3 - \frac{56}{2}\right] = 4\left(28\ln 3 - 28\right)cm^2 \approx 11,05cm^2$$