

CONCOURS D'ENTRÉE A L'EAMAC

SESSION DE MAI 2013

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES POUR LE CYCLE INGÉNIEUR

DURÉE: 4 HEURES

EXERCICE 1: (6 points)

On jette 3 fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b, c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants:

A: $Q(x)$ admet une racine réelle. (2 points)

B: $Q(x)$ admet deux racines réelles distinctes. (2 points)

C: $Q(x)$ admet aucune racine réelle. (2 points)

EXERCICE 2: (5 points)

Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$$



converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

EXERCICE 3: (5 points)

1°) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$ (1 point).

2°) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par:

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } t \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } t \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}$$

Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, +\infty[$ (1 point)

3°) Montrer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \right) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (1 \text{ point})$$

4°) Montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt \quad (1 \text{ point})$$

5°) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



On admettra que : $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. (1 point)

EXERCICE 4: (4 points)

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x e^{-nx}}{\text{Log} n}$.

1°) Montrer que la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ **(1 point)**

2°) Etudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$ **(1 point)**

3°) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ **(1 point)**

4°) Montrer que f n'est pas dérivable en 0. **(1 point)**