AVRIL 1996

Exercice :

Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, u, v).
Soit m un nombre réel, on considère l'application f_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z', défini par :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(m+i)\ z + \frac{\sqrt{2}}{2}(m^2-1)$$

1) a) On pose z= x + iy et z' = x' + iy'
(x, y, x' et y' réels).
Calculer x' et y' en fonction de x et y.

b) Démonter que, quel que soit le réel m, l'image O' de O par f_m appartient à une droite dont on donnera une équation cartésienne.

2) Est-il possible de déterminer m pour que l'application f_m soit :
a) une translation ?
b) une rotation de centre O ?
Dans le cas d'une réponse positive, préciser la ou les valeurs de m et donner les éléments géométriques de la transformation f_m correspondante.

3) On considère le cas particulier où m = 1 et on désigne par Δ la droite d'équation x + y = 0.
Déterminer l'image Δ' de Δ par f_1 (faire la figure).
Quelle est l'image de la droite Δ par l'application f_1^4 ($f_1^4 = f_1 o f_1 o f_1 o f_1$)

Problème:

On considère la suite (Un) définie pour $n \geq 1$ par :

$$Un = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

I Soit f la fonction définie par sur $]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln(x-1) - \ln x$$

1) Calculer la dérivée f’ de f et vérifier que, pour tout x dans $]1,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{4x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$$

2) Calculer la limite de f(x) quand x tend vers 1.

3) Montrer que la limite de f(x), quand x tend vers $+\infty$ est égale à 0.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $]1,+\infty[$. En déduire le signe de f(x) pour x dans $]1,+\infty[$.

5) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, i, j) (Unité graphique : 4 cm)

II Soit (Vn) la suite définie pour $n \geq 1$ par $Vn = \ln(Un)$

1) a) En remarquant que
ln(n!) = ln(1) + ln(2) + ln(3) + ...+ ln(n), montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $V_n - V_{n-1} = (n - \frac{1}{2})f(n)$ (1)
où f est la fonction étudiée dans la partie **I**.

b) Etudier le sens de variation de la suite (Vn) , puis le sens de variation de la suite (Un).

2) Montrer que, la suite (Un) converge vers un réel positif ou nul noté l.

III Soit g la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{5x^2(x-\frac{1}{2})}$$

où f est la fonction définie à la partie **I**.

1) Calculer la dérivée g' de g et vérifier que pour tout x dans $[2,+\infty[$, on a :

$$g'(x)=\frac{-7x^2+16x-4}{20x^3(x-1)(x-\frac{1}{2})^2}$$

2) Dresser le tableau de variation de g, calculer la limite de g(x) quand x tend vers $+\infty$ et en déduire que, pour tout x dans $[2,+\infty[$ g(x) est strictement positif.

(On ne demande pas de tracer la courbe représentative de g)

IV Soit (Wn) la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$W_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel $k \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^2}dx \qquad (2)$$

b) Déduire de (2) l'inégalité pour n entier supérieur ou égal à 2,

$$W_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2} \leq \int_{1}^{n}\frac{1}{x^2}dx \qquad (3)$$

Interpréter graphiquement les inégalités (2) et (3).

c) Pour $n \geq 2$, calculer $\int_{1}^{n}\frac{1}{x^2}dx$ et montrer que $W_n \leq 1$.

d) Montrer que la suite (Wn) converge vers un réel W vérifiant $W \leq 1$.

2) a) A l'aide de l'égalité (1) établie dans la partie **II** et en utilisant le signe de la fonction g étudiée dans la partie **III**, montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a :

$$V_k - V_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$V_n \geq -\frac{1}{5}W_n + 1$$

c) Montrer enfin que la limite l de la suite (Un) est supérieure ou égale à $l^{\frac{4}{5}}$ et donc est strictement positive

*****