

MARS 1997

Première Partie:

Exercice 1

(5 points)

1°) L'intégrale: $\int_0^{\infty} (\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}) dx$ est elle convergente?

2°) Avec $\varphi(x) = x.e^{-x}$, étudier la convergence des 3 séries numériques:

$$u_n = \varphi(n), \quad v_n = \varphi(-n), \quad w_n = \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

En cas de convergence, calculer la Somme.

3°) Discuter suivant les valeurs du réel α la convergence de la série numérique de terme général:

$$u_n = \left(1 - \alpha \cdot \frac{\log n}{n}\right)$$

Exercice 2:

(5 points)

1°) Intégrer l'équation différentielle (1): $(x^2 - y^2)y' = 2xy$.

2°) Le plan affine euclidien étant rapporté à un repère orthonormé, indiquer la nature géométrique des courbes intégrales de (1).

3°) On appelle ζ la courbe intégrale passant par le point de coordonnée $x=1$ et $y=1$.

Déterminer le réel $b \in [0,1]$ de façon à ce que la plus petite des aires limitées par ζ et la droite $y=b$ soit égale à 1.

On donnera de b , une valeur approchée à 10^{-2} près.

Deuxième partie:

Exercice1:

On considère l'ensemble E des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, où a, b, c appartiennent à $\mathbb{R}$ avec $a^2 + bc > 0$.

On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\delta = \sqrt{a^2 + bc}$

Pour $A \in E$, on note U_A , l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A .

1°) Pour $A \in E$ et $n \in \mathbb{N}$ calculer A^n (On pourra l'exprimer à l'aide de A , I , n et δ).

2°) On forme les sommes: $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^{2k}}{(2k)!}$ (avec $0! = 1$).

Montrer que S_n et C_n peuvent s'écrire sous la forme:

$S_n = XU_n$ et $C_n = YV_n$ où X et Y sont des matrices et U_n et V_n les termes généraux de 2 suites numériques que l'on précisera.

3°) On désigne par F , le sous ensemble de E constitué des matrices A telle que U_A ait pour valeur propres:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4°) E et F sont ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des matrices carrée d'ordre 2 à coefficients réels.

Exercice 4:

1°) Déterminer les racines réelles du polynôme $P(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$.

2°) décomposez en éléments simples sur $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle:

$$F(X) = \frac{-12x}{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}$$

3) Dans cette question, on se propose d'utiliser les résultats ci-dessus pour déterminer la limite de la suite (U_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

a) Montrer, par exemple en utilisant un raisonnement par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

b) Justifier, pour tout entier $n \geq 1$ l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \frac{1}{12n^4} \left[n(n+1)^2 - \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \right] - \frac{1}{3}$$

d) A partir du résultat précédent, déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \text{ puis la limite de la suite } (U_n).$$