Fomesoutra.com
ça soutra !

MARS 1998 I

I - Etudier la fonction f de R vers R telle que :

$$f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$$

(Représentation graphique sur du papier millimétré unité : 1cm)

II - Soit E l'espace euclidien. Soient A et B deux points distincts de E. Soit C le milieu du segment [AB].
Etudier suivant les valeurs des nombres réels m et k l'ensemble des points M de E tels que :

$$MA^2 + m\,MB^2 - 2MC^2 = k$$

Examiner le cas m = 3 et $AB^2 = 1$

III - 1°) Etudier la fonction numérique f telle que

$$f(x)=4x^3-3x-1$$

2°) Construire dans un repère orthonormé $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$, la courbe (C) d'équation :

$$f(x)=4x^3-3x-1$$

(unité de longueur : 2 cm)

3°) Ecrire l'équation de la droite (D) qui passe par le point A(x=1 ; y=0) et qui a pour pente le réel m. Discuter, lorsque M varie, le nombre des points d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C).

4°) Lorsqu'il existe trois points d'intersection, on les désigne par A, M', M''. Calculer en fonction de m, les coordonnées (x,y) du point N, conjugué harmonique de A par rapport à M' et M''.

Montrer qu'il existe une relation, indépendante de m, de la forme y=g(x) entre x et y .

Construire dans le repère $\left\{O;\vec{i};\vec{j}\right\}$ la courbe (C_1) d'équation y=g(x) et en déduire l'ensemble des points N lorsque m varie.

Fomesoutra.com
ça soutra !

5°) Les courbes (C) et (C) sont elles tangentes au point A ?

MARS 1998 II

EXERCICE 1

- Soit f la fonction définie sur R par

$\forall x \in \mathrm{R}\ ,\ f(x) = 4\dfrac{e^x}{e^x+1}$

- On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormal. $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$

1) Déterminer les limites de $f(x)$ quand $x \to -\infty$ puis quand $x \to +\infty$. En déduire les asymptotes à (C).

2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation

3) Démontrer que le point d'intersection A de (C) et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour (C).

4) Donner une équation de la tangente à (C) en A.

5) Tracer sur un même graphique : la courbe (C), sa tangente au point A et ses droites asymptotes.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \ln x - \dfrac{1}{3}$

1) a) Etudier les variations de f.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (On pourra mettre x^3 en facteur dans l'expression de $f(x)$.

2) Construire dans un repère orthogonal (unités : 10 cm en abscisse, 5 cm en ordonnée) la courbe représentative (C) de f sur l'intervalle $]0;1[$.

3) Soit λ un réel strictement positif.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_\lambda^1 \ln t.dt$

b) En déduire $\mathrm{I}(\lambda) = \int_\lambda^1 f(t).dt$. Donner une interprétation graphique du résultat.

c) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to 0} \mathrm{I}(\lambda)$.

EXERCICE 3

On donne trois points A, B et C distincts non alignés du plan et on note a, b et c les longueurs des côtés du triangle ABC :. $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$

On se propose d'étudier l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

1) Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment $[BC]$.

   a) Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et BC^2. En déduire :

   $$AG^2 = \frac{1}{9}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$$

   Ecrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2

   b) Montrer que :

   $$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

2) Déterminer l'ensemble (E).

3) On choisit $a = 5$, $b = 4$ et $c = 3$. Placer trois points A, B et C et dessiner (E) dans ce cas particulier.