

MARS 1998 III

Soit u un nombre complexe différent de (-1) , de module 1 et d'argument 0.

- 1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{1-u}{1+u}$
- 6) En déduire le module et un argument du nombre complexe z tel que : $\frac{2+iz}{2-iz} = u$
- 7) Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation $(2+iz)^5 = (2-iz)^5$

- On note f_0 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_0(x) = e^{-x}$
- Pour tout réel α strictement positif, on note f_α la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f_\alpha(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha(x) = x^\alpha \cdot e^{-x} \end{cases}$$
- Pour tout réel α positif, on notera (C_α) la courbe représentative de f_α dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

A -/

- 1) a) Etudier les variations de f_0 et de f_1 .
 b) Représenter les courbes (C_0) et (C_1) sur une même figure (unité = 5 cm).
 On précisera la position de (C_0) par rapport à (C_1) .
- 2) Soit α un réel strictement positif et différent de 1.
 a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_α en 0.
 b) Etudier les variations de f_α .
- 3) Soit α un réel strictement positif.
 d) Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^*$ de (C_0) et (C_α) .
 e) Soit 2 réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$
 i. Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^*$ de (C_α) et (C_β) .
 ii. Démontrer que toutes les courbes (C_α) passent par un même point et déterminer une équation de la tangente à la courbe (C_α) en ce point.
- 8) Représenter les courbes $(C_{\frac{1}{2}})$ et (C_e) sur une même figure (unité=5 cm), distincte de celle demandée à la question 1).
- 9) α étant un réel strictement positif, soit g_α la restriction de f_α à l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.
 a) Démontrer que g_α admet une fonction réciproque h_α .
 b) On précisera l'ensemble de définition de h_α , le sens de variation de h_α , ainsi que les propriétés de continuité et de dérivabilité de h_α .

- c) Représenter graphiquement la courbe représentative de $h_{\frac{1}{2}}$ sur la même figure qu'à la question 4).

B -/

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = n$ est un entier naturel. On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F_n(x) = \int_0^x f_n(t).dt$$

- 1) Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et déterminer les limites des fonctions F_0 et F_1 lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- 2) Pour $n \geq 1$ montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, F_n(x) = -x^n e^{-x} + n.F_{n-1}(x)$.
- 3) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n admet une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$. On notera cette limite u_n .

Quelle relation existe-t'il entre u_n et u_{n-1} ?

En déduire la valeur de $u_n \forall n \in \mathbb{N}$.

- 4) Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ étudier les variations de F_n . On donnera l'allure de la courbe représentative de F_3 .
- 5)
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$$
 - b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1} \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right)$$
 - c) En utilisant une majoration de $f_n(t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour $n \geq 1$ montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq F_n(1) \leq \frac{1}{e}$
 - d) A l'aide de 5)b) et 5)c) en déduire la limite de $\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

MARS 1998 V

Exercice

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c telles que :

$$a = i - 1 \quad b = 1 + i \quad c = -1 + i$$

On note Γ le cercle de diamètre $[AB]$

- 1)
 - a) Placer sur une figure les points A , B , C et le cercle Γ .
 - b) Mettre les nombres complexes a , b et c sous forme trigonométrique.
 - c) Soit R la rotation de centre O telle que $R(A) = B$.
Déterminer l'angle de R et le point $R(B)$, image de B par R .
 - d) Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par R ; placer Γ' sur la figure.
- 10) On considère un nombre $\theta \in [0 ; 2\pi[$ distinct de π .
On note M le point d'affixe $z = 1 + i.e^{i\theta}$.
On désigne par M' l'image de M par R et on appelle z' l'affixe de M' .
 - a) Montrer que M est un point Γ distinct de A et B .
 - b) Exprimer z' en fonction de z .
Calculer en fonction de θ les affixes u et u' des vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BM'}$.
 - c) Etablir la relation $u = u' \cdot \tan \frac{\theta}{2}$.
 - d) Prouver que les points B , M et M' sont alignés.
Placer sur la figure un point M et son transformé M' .

Problème

Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$$

- 1) Etudier le sens de variation de f_n suivant les valeurs de n .
- 2) Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que (C_n) possède un axe de symétrie parallèle à $(O, \vec{j})$ et que (C_n) passe par quatre points dont les coordonnées (que l'on calculera) ne dépendent pas de n .

- 3) Tracer dans un même repère les courbes (C_2) et (C_7) .
- 4) On pose $I_k = \int_0^2 x^{7-k} (x-2)^{7+k} .dx$ où $k \in \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$.
- f) Calculer I_7
- g) En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_k et I_{k+1} pour $k \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$.
En déduire I_0 .
- h) Calculer l'aire de la partie Δ du plan définie par :
- i)
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ f_7(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$