AOUT 1998 I

I - Etudier la fonction f de R vers R telle que :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$$

(Représentation graphique sur du papier millimétré unité : 1cm)

II - Soit a un nombre réel strictement positif. Soit ABC le triangle tel que

AB = 3a ; AC = 4a ; BC = 5a

1°) Déterminer le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients :

A(-5) ; B(4) ; C(3)

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan (euclidien) du triangle ABC tels que, k désignant un nombre réel donné, l'on ait :

$$4MB^2 + 3MC^2 - 5MA^2 = ka^2$$

Discuter. Envisager le cas k=12.

III - Soit l'équation du second degré en t (nombre réel) :

$$t^2 - 2(x+1)t + y + x^2=0 \qquad (1)$$

où t désigne l'inconnue et x,y les coordonnées d'un point M dans un repère cartésien donné $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$ orthonormé.

1°) Etablir la relation qui doit lier x et y pour que l'équation (1) admette deux racines égales. Quelle est l'équation de l'ensemble (C_1) des points M pour lesquels l'équation (1) a ses racines égales. Construire (C_1).

2°) Dans quelles régions du plan euclidien (P) doit être situé M pour que l'équation (1) ait deux racines distinctes ?

3°) Quelle est l'équation de l'ensemble (C_2) des points M pour lesquels l'équation (1) associée possède, au moins, une racine nulle ?
Construire (C_2) dans le repère $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$. Démontrer que (C_1) et (C_2) sont tangentes.

4°) Quelle est l'équation de l'ensemble (C_3) des points M pour lesquels l'équation (1) associée admet deux racines opposées ?
Construire (C_3) dans le repère $\{O; \vec{i}; \vec{j}\}$. Préciser l'intersection de (C_1), (C_2) et (C_3).

5°) Discuter, suivant la position du point M relativement aux courbes (C_1), (C_2) et (C_3), l'existence et le signe des racines de l'équation (1) associée.

<u>AOUT 1998 II</u>

I - Etudier la fonction f de R vers R telle que :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 5x + 7}$$

(Représentation graphique sur du papier millimétré unité : 1cm)

<u>II - Soit E l'espace euclidien. Soient A et B deux points distincts de E. Soit C le milieu du segment [AB].</u>

Etudier suivant les valeurs des nombres réels m et k l'ensemble des points M de E tels que :

$$MA^2 + m\,MB^2 - 2MC^2 = k$$

Examiner le cas m = 3 et $AB^2 = 1$

III - 1°) Etudier la fonction numérique f telle que

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

2°) Construire dans un repère orthonormé $\{O ; \vec{i} ; \vec{j}\}$, la courbe (C) d'équation :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

(unité de longueur : 2 cm)

3°) Ecrire l'équation de la droite (D) qui passe par le point A(x=1 ; y=0) et qui a pour pente le réel m. Discuter, lorsque M varie, le nombre des points d'intersection de la droite (D) et de la courbe (C).

4°) Lorsqu'il existe trois points d'intersection, on les désigne par A, M', M''. Calculer en fonction de m, les coordonnées (x,y) du point N, conjugué harmonique de A par rapport à M' et M''.

Montrer qu'il existe une relation, indépendante de m, de la forme y=g(x) entre x et y .

Construire dans le repère $\{O ; \vec{i} ; \vec{j}\}$ la courbe (C_1) d'équation y=g(x) et en déduire l'ensemble des points N lorsque m varie.

5°) Les courbes (C) et (C_1) sont elles tangentes au point A ?

****