

**CONCOURS D'ENTREE AUX CYCLES DE TECHNICIEN SUPERIEUR ET
TECHNICIEN DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE
L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
SESSION 2012
EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 3 HEURES**

Exercice 1 (3pts)

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

1. $I = \int_0^1 \ln(x+1) dx$

2. $J = \int_{\frac{1}{e}}^e -\frac{\ln x}{x^2} dx$



Exercice 2 (5pts)

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par: $f(z) = z^3 + (2+3i)z^2 + (4+6i)z + 8$.

1. a. Calculer $f(i)$
 b. Déterminer deux nombres complexes a et b vérifiant: $f(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$ pour tout nombre complexe z .
 c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : f(z) = 0$.
2. On désigne par z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive, par z_2 la solution réelle et par z_3 l'autre solution.
 Montrer qu'il existe un nombre complexe q tel que $z_2 = qz_1$ et $z_3 = qz_2$.
 Soient A_1, A_2 , et A_3 les points du plan complexe d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 .
 Quelle est la nature du triangle $A_1A_2A_3$? (Justifier).

Exercice 3 (5pts)

Soit la suite numérique de terme général u_n , n appartenant à $\mathbb{N}^*$, définie par:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$
 En déduire que la suite (u_n) converge.

3. a. Montrer que la suite de terme général v_n définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$ ($n > 0$) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_1 .
 b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 c. En déduire également l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



Exercice 4 (7pts)

Partie I :

Soit l'équation différentielle (1) : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1. Déterminer une solution de (1) de la forme $f_1(x) = e^{rx}$ où r est un nombre réel.
2. Montrer que la fonction f_2 telle que $f_2(x) = xe^{rx}$ est aussi une solution de (1) (r étant la valeur trouvée précédemment)
3. a. Vérifier que pour tout couple de réels (λ_1, λ_2) la fonction $f_\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (1).
 b. Calculer λ_1 et λ_2 pour que $f_\lambda(0) = \frac{1}{2}$ et $f'_\lambda(0) = \frac{1}{2}$.

Partie II :

f et g sont les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(-x+1) \text{ et } g(x) = \frac{1}{2}e^{-2x}(x+1)$$

(C) et (Γ) leurs courbes représentatives.

On se propose de trouver les points d'intersection de (C) et (Γ) dont l'abscisse α est strictement positive.

1. Montrer que α est nécessairement strictement inférieur à 1.
2. Soit φ une fonction de $]0, 1[$ sur $\mathbb{R}$ définie par: $\varphi(x) = -4x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
 a. Montrer que α est solution de l'équation $\varphi(x) = 0$.
 b. Etudier les variations de φ .
 c. En déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution qui est comprise entre 0,95 et 0,96.
3. Conclure.