S-MT2

Concours EAMAC 2017	Cycle TECHNICIEN/ TECHNICIEN SUPERIEUR	MATHEMATIQUES

Exercice S-MT2-1 : (5points)

On pose P(z) = $z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$

1. u désigne un nombre complexe.
   a) Montrer que P($\bar{u}$) = $\overline{P(u)}$
   b) En déduire que si P(u) = 0 alors P($\bar{u}$) = 0.
2. **a)** Calculer P(1+ i)

   b) En déduire les solutions complexes de l'équation P(z) = 0.

3. a) Factoriser P(z)

b) Résoudre dans C l'équation P(z) = 0.

Exercice S-MT2-2 : (5points)

Soit la suite (U_n) définie sur N* par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{nU_n+4}{n+1} \end{cases}$

1.

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n).

b) (U_n) est – elle arithmétique ? géométrique?

2. On considère la suite (V_n) définie par V_n = nU_n

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique en donnant sa raison et son premier terme.

b) Donner l'expression de V_n en fonction de n.

c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis retrouver ses quatre premiers termes

3. Montrer que la suite (U_n) est strictement monotone et bornée.

4.

a) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \cdots \ldots \ldots .. + V_n$

b) La suite (S_n) est –elle convergente ?

Exercice S-MT2-3 : (5 points)

Le but de l'exercice est d'approcher $ln(1+a)$ par un polynôme de degré 5 lorsque a appartient à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On note $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{t+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^n}{(t+1)^{n+1}}\,dt$.

1) Calculer $I_0(a)$ en fonction de a.
2) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I_1(a)$ en fonction de a.
3) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1}(a) = \frac{(-1)^{n+1}a^{n+1}}{n+1} + I_n(a).$$

4) Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.
   a) Calculer $I_2(a)$, $I_3(a)$ et $I_4(a)$.

c) Justifier que $I_5(a) = ln(1+a) - P(a)$.

5) Calculer l'intégral $J(a)$ définie par : $J(a) = \int_0^a (t-a)^5\,dt$.

6) a) Démontrer que : $\forall t \in [0\,; a]$, $\frac{(t-a)^5}{(t+1)^6} \geq (t-a)^5$.
   b) Démontrer que : $\forall a \in [0\,;+\infty[$, $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$.

7) En déduire que : $\forall a \in [0\,;+\infty[$, $|ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$.

8) Déterminer, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $ln(1+a)$ à 10^{-3} près.

Exercice S-MT2-4 (5 points)

Un sac contient 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4) et 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5).

1) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.
   a) Calcule la probabilité de tirer au plus 2 jetons verts.
   b) Calcule la probabilité de ne tirer que 3 jetons verts.
2) On tire successivement et sans remise 3 jetons du sac.
   a) Calcule la probabilité de tirer exactement 1 jeton vert.
   b) Calcule la probabilité de ne tirer aucun jeton vert.