

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve est composée d'un exercice et d'un problème indépendants, qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.

Exercice



On considère la suite numérique $u(n)$ définie sur N par son origine $u(0) = 1$ et son terme général $u(n+1) = au(n) + bn + c$, où a , b et c sont des nombres réels, $a \neq 0$.

A partir de $u(n)$ on définit la suite $v(n)$ par :

$v(n) = \alpha u(n) + \beta n + \gamma$, pour n entier ≥ 0 , α , β et γ étant des nombres réels, $\alpha \neq 0$.

1) Quelles conditions doivent vérifier les paramètres a , b , c , α , β et γ pour que la suite $v(n)$ soit une suite géométrique ?

2) On donne pour toute la suite de l'exercice : $a = 1/3$, $b = 1$, $c = -1$, $\alpha = 4$, $\beta = -6$, et $\gamma = 15$. Calculer $v(n)$ en fonction de n .

3) En déduire que $u(n)$ peut s'écrire sous la forme $u(n) = g(n) + h(n)$, où $g(n)$ est une suite géométrique et $h(n)$ une suite arithmétique dont on écrira les expressions en fonction de n .

4) Calculer explicitement, en fonction de n , la somme $U = \sum_{k=0}^n u(k)$.

Problème

1) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$.

1a - Etudier précisément les variations de f (dérivées, tableau de variations, concavité, limites, asymptotes, graphe...)

1b - Montrer que, pour tout réel x , on a $f(x) > |x|$

2) On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + (x^2 + 1)^{1/2}$.
Etudier g et tracer son graphe dans le repère orthonormal usuel.

3) On donne maintenant l'application h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - 1)/2x$.
Etudier h . Donner, en fonction de x , des expressions simples pour $h(g(x))$ et $g(h(x))$.

4) Soit l'application u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (x^2 + 1)/2x$.
Etudier précisément les variations de u .

5) n étant un entier naturel, on considère la suite d'applications v_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$v_n(x) = [(x + (x^2 + 1)^{1/2})^n + (x - (x^2 + 1)^{1/2})^n] / 2$$

5a – Calculer $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ et $v_3(x)$.



5b – Pour tout réel x , comparer $v_n(x)$ et $v_n(-x)$.

5c – Pour tout réel x , comparer $v_n(x)$ et $v_{-n}(x)$; en déduire directement les relations existant entre $v_n(-x)$, $v_{-n}(x)$, $v_{-n}(-x)$ et $v_n(x)$.

6) Montrer que v_n est un polynôme.

Préciser le degré de ce polynôme et le coefficient de son terme du plus haut degré.
Calculer le coefficient du terme du plus haut degré pour les polynômes v_4 et v_5 .

7) On note par w l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $w(x) = x^n$, où n est un entier naturel.

Le symbole $\circ$ désignant la loi de composition des applications, montrer que, selon la parité de n , v_n peut s'écrire sous les formes $(u \circ w \circ g)$ ou $(h \circ w \circ g)$.

8) Déduire de la question précédente les tableaux de variations de v_n , selon la parité de n .

9) Dans cette question, on suppose que n est un entier non nul.

Soit k un nombre réel donné.

Discuter, selon la valeur de k , le nombre de racines réelles de l'équation $v_n = k$.

10) Soit le nombre réel θ tel que $0 < \theta < \pi/2$

10a - Résoudre, dans le corps C des nombres complexes, l'équation (E) :

$$(E) \quad z^n + z^{-n} = 2 \cos \theta$$

10b - z_s étant une racine de l'équation (E), calculer $h(z_s) = t_s$.

10c - En notant encore par v_n le prolongement à C de l'application définie à la question 5, calculer $v_n(t_s)$.