

AVRIL 2017

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'épreuve comporte deux exercices et un problème indépendants, à traiter dans un ordre quelconque.

Exercice n° 1

Soit un entier n strictement positif.

On note $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ les k diviseurs de n , indicés en sens strictement croissant, avec $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{k-1} < d_k = n$.

1. On donne $n = 6$.

Quelles sont les valeurs des 4 diviseurs (d_1, d_2, d_3, d_4) de 6.

Montrer que $(\prod_{j=1}^4 d_j)^2 = 6^4$

2. On se place dans le cas général.

Démontrer la relation suivante :

$$(\prod_{j=1}^k d_j)^2 = n^k$$

Exercice n° 2

Rappel : soient 2 événements A et B , de probabilités $P(A)$ et $P(B)$ non nulles.

On rappelle que la probabilité de A conditionnellement à B , notée $P(A/B)$ est donnée par :

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B/A).P(A)/P(B)$$

Dans un pays imaginaire, on sait a priori que 3 % des automobilistes du pays conduisent en état d'ébriété. Le gouvernement lance une campagne de lutte contre l'alcool au volant.

À cet effet, la gendarmerie est équipée d'un alcootest dont les performances sont les suivantes :

- Dans 2 % des cas, l'alcootest est positif à tort (la personne contrôlée n'est pas en état d'ébriété)

- Dans 96 % des cas, l'alcootest est positif à juste titre (la personne contrôlée est effectivement en état d'ébriété)

1. Calculer la probabilité que l'alcootest soit positif.

2. Calculer la probabilité qu'un conducteur ne soit pas en état d'ébriété alors que son alcootest a été positif.

Quelle conclusion en tirez-vous ?

Problème

Soient n et p deux nombres entiers naturels strictement positifs.

On considère la famille $G(n, p)$, dépendant des paramètres n et p , des fonctions $g_{n,p}$ définies sur $[0, +\infty[$ par :

$$x \rightarrow g_{n,p}(x) = (x^n)e^{(-x^p)}$$

Partie I

Dans cette première partie, on prend $n = 1$ et $p = 2$.

Pour simplifier, on notera par g la fonction $g_{1,2} : g_{1,2}(x) = x e^{-x^2}$.

I-1. Calculer g' et g'' , dérivées première et seconde de g , et étudier leur signe.

I-2. Étudier très précisément les variations de g (limites, asymptotes, points caractéristiques et pentes en ces points, convexité, ...). Étudier la position de G , graphe de g , par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$. Donner le tableau de variation de g .

I-3. Donner la forme du graphe G de g .

I-4. On définit l'intégrale $L_1 = \int_0^{+\infty} g(x)dx$.

Calculer L_1 .

Partie II

Dans cette deuxième partie, on prend $n = 3$ et $p = 2$.

On notera par g_3 la fonction $g_{3,2} : g_{3,2}(x) = x^3 e^{-x^2}$.

II-1. Étudier très précisément les variations de g_3 : limites, asymptotes, étude des dérivées première et seconde, points d'inflexion, points caractéristiques, convexité, ... Dresser le tableau de variation de g_3 .

II-2. Donner la forme du graphe G_3 de g_3 .

II-3. Étudier l'intersection de G et G_3 .

II-4. On définit l'intégrale $L_3 = \int_0^{+\infty} g_3(x)dx$

Calculer L_3 .

Partie III

Dans cette troisième partie, on prend $p = 2$, et n est un entier quelconque strictement positif.

On notera par g_n la fonction $g_{n,2} : g_{n,2}(x) = x^n e^{-x^2}$.

III-1. Montrer que g_n passe par un maximum pour un point d'abscisse $\alpha(n)$ que l'on déterminera.

III-2. On pose $u(n) = g_n(a(n))$.

Calculer $u(n)$.

Montrer que la suite $\{u(n)\}$, $n \geq 3$, est croissante.

III-3. On définit l'intégrale $L(n) = \int_0^{+\infty} g_n(x) dx$.

Trouver une relation de récurrence entre $L(n)$ et $L(n-2)$.

Partie IV

On considère dans cette partie le cas général $g_{n,p}(x) = x^n e^{-x^p}$.

IV-1. Donner l'expression de $g'_{n,p}$, dérivée première de $g_{n,p}$.

Étudier les racines éventuelles de l'équation $g'_{n,p}(x) = 0$ et en déduire le signe de $g'_{n,p}$.

IV-2. Donner l'expression de $g''_{n,p}$, dérivée seconde de $g_{n,p}$. Étudier son signe et en déduire la concavité de $g_{n,p}$.

IV-3. En déduire les variations de $g_{n,p}$. Étudier ses points particuliers, et donner la forme générale de son graphe $G_{n,p}$.

IV-4. Montrer que toutes les courbes $\{G_{n,p}\}$ passent par un point fixe A ; donner les coordonnées de A ainsi que l'équation de la tangente en A à $G_{n,p}$.

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve est composée de quatre problèmes indépendants, portant tous sur les matrices. Ils sont à traiter dans un ordre quelconque.

Problème 1 : diagonalisation

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels.

Soit A une matrice de M_2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels.

On sait que toute matrice symétrique est diagonalisable.

Montrons-le dans ce cas : le polynôme caractéristique est $P(x) = (a - x)(c - x) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$

Son discriminant est $(a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$

$\Delta = 0$ si $a = c$ et $b = 0$, c'est-à-dire si A est déjà diagonale.

Sinon, $\Delta > 0$, et il y a deux racines distinctes réelles x_1 et x_2 , donc A est toujours diagonalisable.

Problème 2 : puissance de matrice

M_3 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère la matrice A de M_3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable, écrire la matrice diagonale D .

Le polynôme caractéristique est $P(x) = (1 - x)^2(2 - x)$

1 est racine double, 2 est simple.

2) Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

En déduire une base de vecteurs propres et donner la matrice de passage P .

Sous-espace $E(1)$ associé à la vp 1 :

$$x = x$$

$$y = y$$

$$x - y + z = 0$$

$\Rightarrow E(1)$ est un plan dont les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ forment une base.

Sous-espace $E(2)$ associé à la vp 2 :

$$x = 2x$$

$$y = 2y$$

$$x - y + 2z = 2z$$

$\Rightarrow E(2)$ est une droite dont le vecteur $(0, 0, 1)$ est une base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) n étant un entier naturel non nul, donner l'expression explicite de A^n .

On sait que $P^{-1}AP = D$, $P^{-1}A^nP = D^n$, et donc $A^n = PD^nP^{-1}$

On calcule aisément P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Par le calcul : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

Problème 3 : suites

M_2 désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, à coefficient réels. I_2 est la matrice identité de M_2 .

On définit la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$, par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}$ avec des valeurs initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

1 – Déterminer une matrice A de M_2 telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $v_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. On a $v_{n+1} = A.v_n$, $n \geq 1$; et donc $v_{n+1} = A^n.v_1$

2 – Déterminer le polynôme caractéristique $P(x)$ de A . Diagonaliser la matrice A .

$$P(x) = x^2 - x/2 - 1/2$$

Deux racines : $x_1 = 1$ et $x_2 = -1/2$

$$\text{Diag}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3 – Soit $R_n(x)$ le reste de la division euclidienne de x^n par $P(x)$, $n \geq 2$.

Montrer que $R_n(x) = a_n x + b_n$ où a_n et b_n sont des nombres réels dont on donnera l'expression en fonction de n .

On a $x^n = P(x).Q_n(x) + R_n(x)$, Q_n étant le polynôme quotient

Comme $P(x)$ est de degré 2, $R_n(x)$ est de degré 1 : $R_n(x) = a_n x + b_n$

$$(x_1)^n = 1 = a_n + b_n$$

$$(x_2)^n = (-1/2)^n = -a_n/2 + b_n$$

On en déduit :

$$a_n = 2[1 - (-1/2)^n]/3 = 2/3 - 2(-1/2)^n/3$$

$$b_n = 1/3 + 2(-1/2)^n/3$$

4a – Pour tout $n \geq 2$, montrer que $A^n = a_n A + b_n I_2$.

Par récurrence :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On trouve facilement $a_2 = 1/2$ et $b_2 = 1/2$

Vrai pour $n = 2$

Supposons la relation vraie au rang n .

$$A^n = a_n A + b_n I_2 \Rightarrow A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A = a_n (A/2 + I_2/2) + b_n A = A(a_n/2 + b_n) + (a_n/2) I_2$$

Reste à vérifier que $a_{n+1} = (a_n/2 + b_n)$ et $b_{n+1} = a_n/2$.

- $a_n/2 = 1/3 - 1(-1/2)^n/3 = 1/3 + 2(-1/2)^{n+1}/3 = b_{n+1}$
- $(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n/3 = 2/3 - 2(-1/2)^{n+1}/3 = a_{n+1}$

La relation est donc vérifiée pour tout $n \geq 2$.

4b – En déduire que la matrice A^n converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite A^* à déterminer.

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{a_n}{2} + b_n & \frac{a_n}{2} \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$$

$$(a_n/2 + b_n) = 2/3 + (-1/2)^n/3$$

Quand $n \rightarrow +\infty$:

$$a_n/2 \rightarrow 1/3$$

$$b_n \rightarrow 1/3$$

$$(a_n/2 + b_n) \rightarrow 2/3$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

4c – Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

D'après la question 1, $v_{n+1} = A^n \cdot v_1$; d'où $u_{n+1} = a_n/2 + b_n = 2/3 + (-1/2)^n/3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2/3$$

Problème 4 : matrice à diagonale dominante

M_n désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels positifs, non tous nuls.

Pour toute matrice A de M_n , de coefficients (a_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n$, on notera par c_j , $j = 1$ à n , la $j^{\text{ième}}$ colonne de coefficients (a_{ij}) , $1 \leq i \leq n$.

On s'intéresse aux matrices de M_n vérifiant, pour tout $i = 1$ à n , l'ensemble (H) d'inégalités :

$$(H) \quad a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$$

De telles matrices vérifiant (H) sont appelées *matrices à diagonale dominante*.

1 – Soit A une matrice de M_2 , vérifiant les inégalités (H). Montrer que A est inversible.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; d'après (H), on a : $a > b$ et $d > c$.

Le déterminant de A est $\text{Dét}(A) = ad - bc$; on a donc $\text{Dét}(A) > 0$.

A est inversible.

2 – Passons au cas général, et considérons une matrice A de M_n vérifiant les inégalités (H).

On désigne par B, de coefficients b_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, la matrice obtenue à partir de la matrice A en remplaçant, pour tout $j \geq 2$, la colonne c_j de A par une nouvelle colonne définie par $c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot c_1$

$$c_j \rightarrow c_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot c_1$$

2a – Montrer que a_{11} est strictement positif.

Puisque $a_{11} > \sum_{j=2, j \neq 1}^n a_{1j}$ et que tous les a_{1j} sont ≥ 0 , $a_{11} > 0$

2b – Calculer les coefficients b_{ij} en fonction des a_{ij} . Que valent les coefficients b_{i1} , pour $j = 1$ à n ?

On a, pour le cas général : $b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot a_{i1}$, pour $j \neq 1$.

Bien sûr, par construction, la première colonne de B est identique à celle de A, et donc $b_{i1} = a_{i1}$ pour tout $i = 1$ à n , et bien sûr $b_{11} = a_{11}$.

Et on remarque que $b_{1j} = 0$ pour tout $j \geq 2$.

2c – Montrer que les coefficients de B vérifient les inégalités H^* :

$$(H^*) \quad \forall i \geq 2, \quad b_{ii} > \sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij}$$

On note que $b_{ii} = a_{ii} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} \cdot a_{i1}$

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} = \sum_{j=2, j \neq i}^n \left(a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \cdot a_{i1} \right) = \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{1j}$$

Comme tous les coefficients sont positifs ou nuls, on a la majoration suivante :

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} < \left(\sum_{j=2, j \neq i}^n a_{ij} \right) + \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{1j} \right) = G + kH \text{ avec } k = a_{i1}/a_{11}$$

$$\text{De façon évidente, on a : } G = \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{ij} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} - a_{i1} < a_{ii} - a_{i1}$$

$$\text{De même, } H = \sum_{j=2, j \neq i}^n a_{1j} = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{1j} - a_{1i} \text{ qui est } < a_{11} - a_{1i}$$

On obtient donc :

$$\sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} < a_{ii} - a_{i1} + (a_{11} - a_{1i}) \cdot a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{i1} + a_{i1} - a_{1i} \cdot a_{i1}/a_{11} = a_{ii} - a_{1i} \cdot a_{i1}/a_{11} = b_{ii}$$

$$\text{Soit } \sum_{j=2, j \neq i}^n b_{ij} < b_{ii}$$

3 – Soit A une matrice de M_n vérifiant H. Montrer qu'elle est inversible.

Par récurrence.

- Le résultat est vrai pour $n = 2$ (question 1)
- Supposons la propriété vérifiée au rang $n-1$.

En procédant aux changements de colonnes indiqués à la question 2, $\text{Dét}(A) = a_{11} \text{Dét}(B)$ où la matrice B est celle de la Q2 :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{12} & & & & \\ & & B & & \\ a_{1n} & & & & \end{pmatrix}$$

Or B est une matrice carrée d'ordre $n-1$ qui vérifie les hypothèses H , donc inversible d'après l'hypothèse de récurrence vraie au rang $n-1$.

Donc A est inversible puisque $a_{11} > 0$ (question 2a).