AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Économie

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

1. Plaçons-nous dans le plan complexe : l'affixe de M est $z(M) = \rho e^{i\theta}$
Son image par la rotation a pour affixe $\rho e^{i(\theta+\pi/3)}$
D'où :
$X = x_M/2 - y_M(3)^{1/2}/2$

$Y = y_M/2 + x_M(3)^{1/2}/2$

2. Considérons le point I(0, -1) ; son image par R a pour coordonnées $(3)^{1/2}/2, - 1/2$.
La droite D' a pour équation :
$(Y + 1/2)/(X - (3)^{1/2}/2) = (3)^{1/2}$
$Y = (3)^{1/2} X – 2$

Le point A, intersection de D' et Δ, a pour coordonnées : $(X_A = 4/(3)^{1/2}, Y_A = 2)$

3. En procédant comme pour la question 1, le point B image de A par rotation de centre 0 et d'angle $– \pi/3$ a pour coordonnées :
$X_B = 5/(3)^{1/2}$, $Y_B = - 1$
Le point B appartient donc à la droite D.

4. On montre facilement $OA^2 = OB^2 = AB^2 = 28/3$
Le triangle OAB est équilatéral.
Sa surface est $OA.OB.\sin(\pi/3) = 14/(3)^{1/2}$

Problème 2

1. $J(1) = [x \,\mathrm{Ln}x – x]_1^e$
$J(1) = 1$

2. Faisons une intégration par parties.
On pose $u = (Lnx)^n$, $du = n.\ (Lnx)^{n-1}/x$, $dv = dx$, $v = x$

$J(n) = [x(Lnx)^n]_1^e - n\ J(n-1) = e - n.J(n-1)$

On a bien $J(n+1) = e - (n+1).J(n)$, soit $J(n+1) = a + bJ(n)$ avec $a = e$ et $b = n+1$.

$J(2) = e - 2$
$J(3) = e - 3J(2) = 6 - 2e$
$J(4) = e - 4J(3) = 9e - 24$

3. Sur $[1, e]$, $Lnx \geq 0 \Rightarrow J(n) \geq 0$
De même, $Lnx \leq 1$; donc $(Lnx)^n - (Lnx)^{n+1} \geq 0$, et $J(n) \geq J(n+1)$
La suite J(n) est décroissante.
Décroissante et minorée, elle admet donc une limite.
Comme, pour tout n, $J(n) \geq 0$, $J(n+1) = e - (n+1).J(n) \geq 0 \Rightarrow (n+1).J(n) \leq e$
$J(n) \leq e/(n+1)$

$\Rightarrow 0 \leq J(n) \leq e/(n+1)$ et donc $\lim J(n) = 0$

On a : $J(n+1) + nJ(n) + J(n) = e$
Quand $n \to +\infty$, $J(n)$ et $J(n+1) \to 0$ et donc $nJ(n) \to e$.

Problème 3

1.a Il y a $C_n^2 = n(n-1)/2$ couples possibles ; un seul est composé des deux tickets gagnants.

Le nombre de couples de tickets composés d'un gagnant et d'un seul est $C_2^1\, C_{n-2}^1$,

soit $2(n-2)$.

Ceci permet d'écrire la loi de probabilité de X.

$P(X = 2) = 2/n(n-1)$

$P(X = 1) = 4(n-2)/n(n-1)$

$P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = (n^2 - 5n + 6)/n(n-1)$

1.b $E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) = 4/n$

$E(X^2) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 4.P(X = 2) = 4/(n-1)$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4(n-2)^2/n^2(n-1)$

1.c
$P(X = 2) = 2{,}2\ \%$; $P(X = 1) = 35{,}6\ \%$; $P(X = 0) = 62{,}2\ \%$

$E(X) = 0{,}4$; $V(X) = 0{,}284$

2.a Y suit une loi binômiale B(2, 2/n)

$P(Y = y) = C_2^y\ (2/n)^y\ ((n-2)/n))^y$ pour y = 0, 1 , 2

$P(Y = 2) = 4/n^2$

$P(Y = 1) = 4(n-2)/n^2$

$P(Y = 0) = (n-2)^2/n^2$

2.b $E(Y) = 4/n$; $V(Y) = 4(n-2)/n^2$

2.c $P(Y = 2) = 4\ \%$; $P(Y = 1) = 32\ \%$; $P(Y = 0) = 64\ \%$
$E(Y) = 0{,}4$; $V(Y) = 0{,}32$

3. a On a : $a(n) – b(n) = 4(n-2)/n(n-1) - 4(n-2)/n^2 = 4(n – 2) / n^2(n – 1)$

3.b Pour n = 50, a(n) – b(n) = 0,001567
Pour n = 64, a(n) – b(n) = 0,000961
Pour n = 63, a(n) – b(n) = 0,009915
Pour = 62, a(n) – b(n) = 0,0010235
n* = 63

4. La probabilité de gagner est P(G) = P(avoir au moins un ticket gagnant)
$P_1(G) = P(X = 1) + P(X = 2) = (4n-6)/n(n-1)$
$P_2(G) = P(Y = 1) + P(Y = 2) = 4(n-1)/n^2$
$P_2(G) - P_1(G) = (4 – 2n)/n^2(n-1) < 0$

La meilleure stratégie est la 1.