AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice 1.

On rappelle le critère d'Abel : dans le cas d'une série à terme général v_n à valeurs réelles du type $\forall n \geq n_0 \quad v_n = (-1)^n y_n$ avec $\forall n \geq n_0, \quad y_n \geq 0$, on obtient la convergence de la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ si $(y_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante et converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

1. D'après Abel appliqué 2 fois, ainsi que le fait qu'une somme de 2 séries convergentes est une série convergente, on a $\sum_n w_n$ converge.
2. D'après Abel et les séries de Riemann, ainsi que le fait que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente, on a $\sum_n u_n$ diverge.
3.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{w_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

4. Lorsque 2 séries positives sont équivalentes, elles sont de même nature. Ici nous avons bien 2 séries équivalentes, mais de nature différente, ceci est possible car elles ne sont pas positives.

Exercice 2.

1.

$$\begin{cases} u_{2n} = 2n(1 + (-1)^{2n}) \\ u_{2n+1} = (2n+1)(1 + (-1)^{2n+1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2n} = 4n \\ u_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

2. La limite de la sous-suite impaire est 0 qui est donc une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$.
3. Comme la sous-suite paire est de limite $+\infty$, la suite $(u_n)_n$ est divergente.
4. Il est nécessaire que la valeur d'adhérence soit unique et finie pour que la série converge.

Exercice 3.

1. Tous ces graphes sont des graphes de fonctions résolvant le système (*). Ces fonctions sont de la forme y^3 soit sur tout $\mathbb{R}$ soit sur $\mathbb{R}^+$ soit sur $\mathbb{R}^-$ complété par la fonction identiquement nulle sur les parties complémentaires ou sur tout $\mathbb{R}$.

2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure en particulier l'unicité de la solution dès lors qu'une condition de Lipschtiz est remplie. Hors de ces conditions, il est possible d'avoir plusieurs solutions comme c'est le cas ici.

Exercice 4.

1. (a) Evident car $|sin(y)| \leq 1$ pour tout y réel.

   (b) f est continue sur $\mathbb{R}^*$. En 0, avec le 1.(a) on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Donc f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

   (c) Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables sur tout $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^*$. De plus

$$\begin{aligned} f'(x) &= sin(\frac{1}{x}) + x\left(\frac{-1}{x^2}\right)cos(\frac{1}{x}) \\ &= sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}cos(\frac{1}{x}). \end{aligned}$$

   (d) La fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}cos(\frac{1}{x})$ admet une limite nulle. Donc g n'est pas continue en 0.

   (e) Le taux de variation de f en 0 est égal à la fonction g qui n'est pas continue en 0, donc f n'est pas dérivable en 0.

2. (a)

$$\begin{aligned} \{0\} \cup [1;+\infty[\cup \bigcup_{n\geq 1}\left([\frac{1}{4^n};\frac{2}{4^n}[\cup [\frac{2}{4^n};\frac{3}{4^n}[\cup [\frac{3}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[\right) &= \{0\} \cup [1;+\infty[\cup \bigcup_{n\geq 1}[\frac{1}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[\\ &= \{0\} \cup [1;+\infty[\cup]0;1[\\ &= \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

   De plus h est définie par parité donc définie sur tout $\mathbb{R}$.

   (b)

   (c) $h(\frac{3}{4^n}) = 1$. La fonction h est continue (comme fonction affine) sur chacun des intervalles en $\frac{1}{4^n}$ de $]0;1[$. Il reste à établir la continuité de h en 0, 1 et pour tout n en $\frac{2}{4^n}$ et $\frac{3}{4^n}$, ce qui se fait aisément. La continuité sur les parties négatives s'obtient par parité. h est bien continue sur tout $\mathbb{R}$.

   (d) Sur $[\frac{2}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[$ la graphe de h forme un triangle égal à un demi rectangle de hauteur 1 et de largeur $\frac{2}{4^n}$. On a donc

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \frac{1}{4^n}.$$

   Comme h vaut 0 sur $[\frac{1}{4^n};\frac{2}{4^n}[$ on a

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \int_{\frac{1}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \frac{1}{4^n}.$$

Enfin

$$\int_{\frac{1}{4^n}}^{1} h(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx = \frac{1-\frac{1}{4^n}}{3}.$$

(e)

$$\int_0^1 h(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{4^n}}^{1} h(x)dx = \frac{1}{3}.$$

(f) h est donc intégrable sur $[0;y]$ pour tout y positif et par parité sur $[y;0]$ pour tout y négatif.

(g) i. La continuité de h sur $\mathbb{R}^*$ assure la dérivabilité de H pour tout y non nul.

ii. $\forall y > 0, \quad H'(y) = h(y)$ et $H'(y) \leq 1$.

iii.

$$H(\frac{1}{4^n}) = H(\frac{2}{4^n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}.$$

iv. Ainsi

$$\mathcal{H}(\frac{1}{4^n}) = \frac{1}{3}$$

et

$$\mathcal{H}(\frac{2}{4^n}) = \frac{1}{6}.$$

(h) La fonction $\mathcal{H}$ n'admet donc pas de limite en 0 ce qui prouve que H n'est pas dérivable en 0.