AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

Exercice

Soit la matrice C_n définie par

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{pmatrix}$$

où les complexes $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(b_j)_{j=1,\ldots,n}$ sont tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i et j variant entre 1 et n.
On notera pour tout ce qui suit : $l_1, \ldots, l_n$ les numéros de lignes 1 à n, et $c_1, \ldots, c_n$ les numéros de colonnes 1 à n.

1.
$$C_1 = \left(\frac{1}{a_1 + b_1} \right).$$

2.
$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{pmatrix}.$$

3. $det(C_1) = \frac{1}{a_1+b_1}$

4.
$$\begin{aligned} det(C_2) &= \frac{1}{a_1+b_1}\frac{1}{a_2+b_2} - \frac{1}{a_1+b_2}\frac{1}{a_2+b_1} \\ &= \frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1) - (a_1+b_1)(a_2+b_2)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{-a_1(b_2-b_1) + a_2(b_2-b_1)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \\ &= \frac{\prod_{i<j=1,2}(b_j-b_i)(a_j-a_i)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)} \end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
det(C_2) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{a_2+b_1}{a_1+b_1} & \frac{a_2+b_2}{a_1+b_2} \\ \frac{a_2+b_1}{a_2+b_1} & \frac{a_2+b_2}{a_2+b_2} \end{vmatrix} \text{ étape (a)} \\
&= \frac{1}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{a_2-a_1}{a_1+b_1} & \frac{a_2-a_1}{a_1+b_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ étape (b)} \\
&= \frac{(a_2-a_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{(a_2-a_1)}{(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \begin{vmatrix} \frac{b_2-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ étape (c)} \\
&= \frac{\prod_{1\le i<j\le 2}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j=1,2}(a_i+b_j)}.
\end{aligned}
$$

Etape (d) . On retrouve bien le déterminant calculé en 4).

6. On retrouve tout très précisément, mais on doit compléter à la fin avec un récurrence sur le $det(C_n)$, puisqu'on obtiendra

$$det(C_n) = \frac{\prod_{i,j=1,\dots,(n-1)}(a_n-a_i)(b_n-b_j)}{\prod_{j=1,\dots,n;i=1,\cdots,n-1}(a_n+b_j)(a_i+b_n)} det(C_{n-1}).$$

Problème

A. Préliminaires :

1. Il suffit d'intégrer f entre t et $+\infty$. On obtient $S(t) = \exp(-\frac{t}{\sigma})\mathbb{1}(t)_{]0;+\infty[}$.
2. En dérivant par rapport à t de part et d'autre du signe égal, on a $f(t) = -S'(t)$. Ainsi
   (a) Pour $\gamma \neq 0$, on obtient
   $$f(t) = \frac{1}{\sigma}\left(1+\frac{\gamma}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}-1}.$$
   (b) Dans le cas $\gamma = 0$, on calcule $lim_{\gamma\to 0}S(t) = \exp(-\frac{t}{\sigma})\mathbb{1}(t)]0;+\infty[$ qui est la fonction de survie de la loi exponentielle de paramètre σ.
3. On remarque alors que
   $$\lim_{q\to 1} H_q(x) = -\int f(x)ln(f(x))dx = H(x).$$
   L'entropie de Shannon n'est que le cas limite $q = 1$ de l'entropie de Rényi-Tsallis.

B. Maximisation sous contraintes

1.

$$\begin{aligned} B(f,g) &= \int d_F(f,g) \\ &= \int -f(x)^q + g(x)^q + qg(x)^{q-1}(f(x) - g(x))dx \end{aligned}$$

2. (a) Comme G^* et G vérifient (1), on a

$$B(G, G^*) = -\int (G(x)^q - G^*(x)^q)dx - \alpha \int (G(x)G^*(x)^{q-1} - G^*(x)^q)dx$$

(b) Grâce à la définition de G^* et au fait que G vérifie (1), on a

$$\int G(x)G^*(x)^{q-1}dx = \int G^*(x)^q dx.$$

(c) Ainsi on obtient

$$B(G, G^*) = -\int (G(x)^q - G^*(x)^q)dx.$$

Et B positive ou nulle entraîne $G = G^*$ de manière évidente. La réciproque est elle aussi triviale.

(d) Comme $B(G, G^*) \geq 0$ on a $H_q(G^*) \geq H_q(G)$ puisque $H_q(G^*) = \frac{1}{1-q}\left(\int (G^*)^q - 1\right)$.

(e) Ainsi, G^* est le maximum de l'entropie de Rényi-Tsallis avec $0 < q < 1$ dans l'ensemble des fonctions vérifiant les contraintes de (1).

(f) On trouve $G^*(x) = \alpha \exp(-\beta x)$ avec α et β tels que

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta^2}, \theta = \frac{\alpha}{\beta}.$$

et l'entropie de Shannon est

$$H_1(f) = -\frac{\alpha}{\beta}\log(\alpha) + \alpha.$$