

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 2000



CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR STATISTICIEN ECONOMISTE

OPTION MATHEMATIQUES

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

Les résultats seront encadrés. Les parties I et II sont indépendantes.

I Etudes de suites

Pour un calcul célèbre Archimède considérez les relations de récurrence :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}, \quad \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}}.$$

❶ Montrer que pour $c_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$, ces relations définissent deux suites $(c_n)_{n \geq 1}$, $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ et qu'il existe deux autres suites $(\theta_n)_{n \geq 1}$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telles que pour tout $n \geq 1$:

$\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \alpha_n \in \mathfrak{R}; c_n = \cos(\theta_n); \lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n)$. $\mathfrak{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ converge vers π

❷ En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $n \geq 1$, l'inégalité :

$$|\pi - \lambda_n| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}$$

En déduire un entier N_1 tel que $|\pi - \lambda_{N_1}| \leq 10^{-6}$

③ Montrer que pour tout entier naturel p donné, λ_n admet, lorsque n tend vers l'infini, le développement :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!} \frac{1}{4^n} + \dots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{1}{4^{pn}} + o\left(\frac{1}{4^{pn}}\right)$$

④ On définit une nouvelle suite

$(\lambda_n^{(1)})_{n \geq 1}$ par $\lambda_n^{(1)} = \frac{-\lambda_n + 4\lambda_{n+1}}{3}$. Montrer que cette nouvelle suite converge aussi vers π

et que l'on a quand n tend vers l'infini :

$$\lambda_n^{(1)} - \pi = o(\lambda_n - \pi)$$

Donner un équivalent de $\lambda_n^{(1)} - \pi$.

⑤ Montrer qu'il existe un réel α que l'on déterminera tel que la suite

$(\lambda_n^{(2)})_{n \geq 1}$ définie par

$$\lambda_n^{(2)} = \alpha \lambda_n^{(1)} + (1-\alpha) \lambda_{n+1}^{(1)} \text{ vérifie}$$

$$\lambda_n^{(2)} - \pi = o\left(\frac{1}{16^n}\right) \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.}$$

⑥ Donner l'expression de $\lambda_n^{(2)}$ en fonction de $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}$ et montrer l'inégalité pour tout n :

$$|\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq \frac{17\pi^7}{576 \times 7!} \frac{1}{4^{3n}}$$

En déduire un entier N_2 tel que $|\pi - \lambda_{N_2}^{(2)}| \leq 10^{-6}$

II Polynômes de Bernoulli

① Soit f une fonction définie continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Montrer que les conditions ci-dessus définissent une unique fonction F continûment dérivable sur $[0,1]$:

$$F' = f, \int_0^1 F(t) dt = 0$$

et exprimer F à l'aide de $G(x) = \int_0^x f(t) dt$

② Montrer que les conditions :

$$B_0 = 1, B_{n+1}' = B_n \text{ et } \int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0 \text{ pour tout } n \geq 0$$

définissent une unique suite de fonctions polynômes. Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré et expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4 .

③ Montrer, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, l'égalité $B_n(0) = B_n(1)$.

④ On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout n entier naturel :

$$C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

Montrer que la suite $(C_n)_{n \geq 0}$ vérifie les conditions du ② définissant la suite $(B_n)_{n \geq 0}$ et en déduire que $(C_n)_{n \geq 0} = (B_n)_{n \geq 0}$.

Qu'en déduit-on pour les graphes de B_n et pour les valeurs, lorsque n est impair $n \geq 3$, de $B_n(0)$, $B_n(\frac{1}{2})$ et $B_n(1)$?

⑤ Montrer que les polynômes B_{2m+1} ne s'annulent pas sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ (On pourra procéder par récurrence sur m et utiliser le théorème de Rolle).
En déduire que les polynômes $B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$ sont de signes constants sur $[0, 1]$.

III Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

① Montrer pour tout N entier naturel non nul l'égalité :

$$\forall t \in]0, 1[, 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

② Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction φ_n définie sur $]0, 1[$ par

$$\forall t \in]0, 1[, \varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$$

est prolongeable par continuité à $[0, 1]$ et que le prolongement est continûment dérivable.

③ Montrer que pour toute fonction f continûment dérivable sur $[0, 1]$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = 0 \text{ (On pourra utiliser une intégration par parties.)}$$

④ Pour k et n entiers strictement positifs, on définit :

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt$$

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$. En déduire selon la parité de n , l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k .

⑤ En utilisant la formule établit au III①, trouver, pour N entier naturel, une expression de

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt \text{ en fonction de } m, N \text{ et } B_{2m}(0).$$

En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ en fonction de m et $B_{2m}(0)$.

Donner les valeurs de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

⑥ Montrer, pour tout m entier naturel non nul, la majoration :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq 2. \text{ En déduire la majoration } |B_{2m}(0)| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}.$$

Pour toute la suite du problème les fonctions considérées seront définies sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivables.

IV Formule sommatoire d'Euler

① Montrer pour m entier strictement supérieur à 0 l'égalité :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{k=1}^m B_{2k}(0) [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] - \int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t) dt$$

② Montrer, en utilisant II ⑤, que pour tout m entier naturel, il existe c réel dans $[0,1]$ tel que :

$$\int_0^1 f^{(2m+1)}(t) B_{(2m+1)}(t) dt = f^{(2m+2)}(c) B_{(2m+2)}(0)$$

En déduire une majoration de cette intégrale en fonction de

$$\|f^{(2m+2)}\| \text{ où } \|f^{(2m+2)}\| = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(2m+2)}(x)|$$

③ Notons $T(f) = \frac{1}{n} \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$ et $h = \frac{1}{n}$.

Expliciter la formule obtenue a la question IV ① lorsque m=2 pour les fonctions $f_i(t) = f(ih + ht)$ pour $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. En déduire l'existence des réels a_1, a_2 et d'une fonction r tels que :

$$\int_0^1 f(t) dt = T(f) + a_1 h^2 + a_2 h^4 - r(h)$$

$$\text{avec } |r(h)| \leq \|f^{(6)}\| \frac{h^6}{16\pi^6}.$$