ECOLE NATIONALE D'ECONOMIE APPLIQUEE (ENEA)
DEPARTEMENT DE STATISTIQUE
BP 5084
DAKAR - SENEGAL

INSTITUT SOUS REGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
YAOUNDE - CAMEROUN

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES

EXERCICE n° 1

❶ Soit $y = x^3 - 3x - 1$, la dérivée est égale à $3x^2 - 3$ et elle est nulle pour $x = \pm 1$. Le tableau de variation montre que y est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$, strictement décroissante sur $]-1,1]$ et de nouveau strictement croissante sur $[1, +\infty[$. D'autre part dans chacun de ces intervalles y prend des valeurs négatives et positives. D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation admet 3 solutions.

❷ On a :

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1x_2x_3.$$

Puis par identification des polynômes, on obtient :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3 \text{ et } x_1x_2x_3 = 1.$$

Les relations demandées s'en déduisent.

❸ Soit $x=2\cos\alpha$. Sachant que $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)$, l'équation devient : $\cos 3\alpha=\frac{1}{2}$, d'où les valeurs des 3 racines, à savoir $2\cos(\frac{\pi}{9})$, $2\cos(\frac{7\pi}{9})$ et $2\cos(\frac{13\pi}{9})$

EXERCICE n° 2

❶ Dans l'expression de I_{n+1}, on effectue un changement de variable, à savoir $x=t+\pi$, et on obtient $I_{n+1}=-e^{-\pi}I_n$. On a donc une suite géométrique de raison $q=-e^{-\pi}$

❷ et ❸ Avec une double intégration par parties, on obtient : $I_0=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$ et alors $I_n=(q)^n I_0$. Comme la raison est, en module, strictement comprise entre 0 et 1, la suite est convergente vers 0.

❹ On a : $S_n=\sum_{k=0}^{n} I_k=I_0(\frac{1-q^{n+1}}{1-q})$. On obtient : $S_n=\frac{1+(-1)^{n+2}e^{-(n+1)\pi}}{2}$ et la suite S_n est convergente vers $\frac{1}{2}$.

❺ $R_n=\prod_{k=0}^{n} I_k=\left(\frac{1+e^{-\pi}}{2}\right)^{n+1}\left(-e^{-\pi}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

PROBLEME

1. La dérivée de y est égale à $\cos x - \sin x$.
Tableau de variation :

x	$-3\pi/4$		$-\pi/4$		$\pi/4$
y'	0	+		+	0
y	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$

D'où $J = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

2. f^{-1} est continue et dérivable comme fonction réciproque d'une fonction continue et dérivable.

3. On obtient $f^{-1}(-\sqrt{2}) = -\dfrac{3\pi}{4}$, $f^{-1}(\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$, $f^{-1}(1) = 0$ et $(f^{-1}(1))' = 1$

4. f^{-1} n'est pas dérivable aux valeurs $\pm\sqrt{2}$.
On trouve : $(f^{-1}(x))' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\cos f^{-1}(x) - \sin f^{-1}(x)}$

Par ailleurs $f(f^{-1}(x)) = \cos f^{-1}(x) + \sin f^{-1}(x) = x$ et en élevant au carré, on obtient : $\cos f^{-1}(x) \sin f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$. Les deux expressions $\cos f^{-1}(x)$ et $\sin f^{-1}(x)$ sont donc solutions de l'équation $t^2 - xt + \dfrac{x^2-1}{2} = 0$' d'où $\cos f^{-1}(x) - \sin f^{-1}(x) = \sqrt{2-x^2}$.
En conclusion :

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$$

5.

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx = f^{-1}(\sqrt{2}) - f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx = f^{-1}(1) - f^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$$

6. Soit $y=\cos x+\sin x$ et en élevant au carré, on obtient : $y^2=1+2\cos x\sin x$. La résolution de ces deux équations (second degré en $\sin x$ et en $\cos x$) donne le résultats demandés (cf. question 4), à savoir : $\sin f^{-1}(x)=\dfrac{x-\sqrt{2-x^2}}{2}$ et $\cos f^{-1}(x)=\dfrac{x+\sqrt{2-x^2}}{2}$

7. Comme les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice, s'il y a une solution à l'équation $f(x)=f^{-1}(x)$, on a aussi $f(x)=x$. En étudiant la fonction $f(x)-x$, on vérifie que $f(x)>x$ sur tout l'intervalle considéré, donc l'équation n'a pas de solution.

8. Soit la fonction $g(x)=\sin x+\cos x-2x$, elle admet comme dérivée la fonction $\cos x-\sin x-2$ qui est toujours négative. La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle considéré de 1 à $\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{2}$ et cette dernière valeur est négative. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une seule solution à l'équation.
On vérifie que $g(0.7)>0$ et que $g(0.8)<0$.

On a : $h(x)=\dfrac{g(x)}{3}$, donc $h(\alpha)=0$. On vérifie que $\left|h'(x)\right|\leq 0.69$, par conséquent :
D'après le théorème des accroissements finis sur $]0.7,0.8[$, on a :
$h(x)-h(\alpha)=(x-\alpha)h'(c)$, où $c\in]0.7,0.8[$. Donc $f(x)=3h(x)+2x=3(x-\alpha)h'(c)+2x$
ou encore $|f(x)|\leq 3x(0.69)+2x+3\alpha(0.69)=4.07x+2.07\alpha$

On a $h(\alpha)=0$, donc $\sin\alpha+\cos\alpha=2\alpha$. En élevant au carré, on obtient :
$\cos\alpha\sin\alpha=\dfrac{4\alpha^2-1}{2}$, puis $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=4\alpha^2-1$ et $\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{4\alpha}{4\alpha^2-1}$.

D'autre part, $(\cos\alpha+\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha+\sin^3\alpha+3(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha\sin\alpha)$, d'où
$\cos^3\alpha+\sin^3\alpha=8\alpha^3-3\alpha(4\alpha^2-1)$;
$\cos\alpha=\alpha+\sqrt{\dfrac{1-2\alpha^2}{2}}$ et $\sin\alpha=\alpha-\sqrt{\dfrac{1-2\alpha^2}{2}}$.

9. La fonction F est continue d'après la question 5 et $F^{'}(x) = (f^{-1}(x))^{'}$, donc les deux fonctions sont égales à une constante additive près, mais les valeurs aux bornes sont les mêmes, les deux fonction F et f^{-1} sont donc égales.

10. La courbe représentative de la fonction f est en dessous de la tangente sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et au dessus de la tangente sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$. Il suffit de regarder la convexité de la courbe.

$$\int_0^{\pi/4} f(x)dx = [-\cos x + \sin x]_0^{\pi/4} = 1 \times 4cm^2 = 4cm^2$$

11. $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n I_0 \to 0$