**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**
**VOIE A**

**AVRIL 2002**

**CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

## EXERCICE n° 1

❶ On obtient $f^{'}(x)=\ln x-1$. La dérivée s'annule pour $x=e$. La fonction $f$ est strictement décroissante sur $]0,e]$ et croissante sur $[e,+\infty[$ , avec une branche parabolique dans la direction oy.

❷ La résolution de l'équation proposée revient à trouver l'intersection entre le graphe de $f$ et la droite d'équation $y=ax+e$. D'après le graphe, il y a toujours deux solutions.

❸ $I=\int_0^e (xLnx-2x+e)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}Lnx-\frac{x^2}{4}-x^2+ex\right]_0^e=\frac{e^4}{4}$



## EXERCICE n° 2

❶ $\varphi_{a,b}(x)-1=\cos\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b-x}{2}\right)$

Pour $a<x<b$ , on a : $0<\frac{x-a}{2}<\pi$ et $0<\frac{b-a}{2}<\pi$ , donc $\varphi_{a,b}(x)>1$

Pour $x=a$ ou $x=b$ , $\varphi_{a,b}(x)=1$

Pour $x<a$ ou $x>b$ , $\varphi_{a,b}(x)<1$? D'autre part, $\varphi_{a,b}(x)\geq-\cos\frac{a-b}{2}>1$

❷ Soit $M = \underset{[-\pi,\pi]}{Sup}|f|$. Cette borne est atteinte en $x_0$ et par continuité, il existe un intervalle $[\alpha,\beta]$ contenu dans $[-\pi,\pi]$, tel que pour tout x appartenant à $[\alpha,\beta]$, on a : $|f(x)| > \frac{M}{2}$. On suppose que $f(x) > 0$ sur cet intervalle (sinon on change f en $-f$ ). Posons $a = \alpha$ et $b = \beta$.

$$\int_a^b f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx \geq \frac{M}{2}(b-a)$$

Fixons $\eta$ tel que $2\eta M < \frac{b-a}{8}M$ , de sorte que :

$\left|\int_a^{b+\eta} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\right| \leq \eta M < \frac{M}{16}(b-a)$ et $\left|\int_{a-\eta}^{a} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\right| \leq \eta M$ , avec $-\pi \leq a-\eta$ et $b+\eta \leq \pi$

$\varphi_{a,b}$ est continue sur le compact $[-\pi, a-\eta] \cup [b+\eta, \pi] = K$ et prend ses valeurs dans $[-1,1]$, il existe donc $k \in ]0,1[$ tel que pour tout $x \in K$, $|\varphi_{a,b}(x)| \leq k \Rightarrow \left|\int_K f(x)\varphi_{a,b}(x)^n\,dx\right| \leq 2M\pi k^n$

On peut alors choisir $n$ tel que $2\pi Mk^n < \frac{b-a}{2}M$ .

Pour toute valeur de $n$, $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\varphi_{a,b}(x))^n\,dx\right| \geq \frac{M(b-a)}{2} - 2\eta M - \frac{M(b-a)}{8} \geq \frac{M}{4}(b-a)$ ,

l'intégrale est non nulle.



❸

$$\varphi_{a,b}(x) = \cos x \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + \sin x \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) + 1 - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = pe^{ix} + qe^{-ix} + r .$$

Par conséquent, $\varphi_{a,b}(x)$ est une combinaison linéaire de $\left(e^{inx}\right)$, donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_{a,b}(x)^n\,dx = 0$ d'après l'hypothèse et la question 2, ceci implique $f = 0$

**EXERCICE n° 3**

❶ On montre que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et on vérifie par récurrence la relation : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

❷ Le minimum est atteint pour la valeur de $a$ qui annule la dérivée. $a$ est égal à la moyenne des $X_t$ $(t = 1,2,\ldots n)$.

❸ On pose $f(a,b) = \sum_{t=1}^{n} (X_t - (at+b))^2$ . Le minimum est obtenu pour les valeurs qui annulent les deux dérivées partielles :

$\sum_t t(X_t - at - b) = 0$ et $\sum_t (X_t - at - b) = 0$. Il faut alors résoudre le système suivant à deux équations :



$$\begin{cases} \sum_t t\, X_t = a\left(\sum_t t^2\right) + b\left(\sum_t t\right) \\ \sum_t X_t = a\left(\sum_t t\right) + bn \end{cases}$$

ou encore $\begin{pmatrix} \sum_t t^2 & \sum_t t \\ \sum_t t & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_t tX_t \\ \sum_t X_t \end{pmatrix}$

Soit $D = n\sum_t t^2 - (\sum_t t)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$. On obtient

$$a = \frac{\sum_t t\, X_t - \frac{(n+1)\sum_t X_t}{2}}{D} n \text{ et } b = \frac{(\sum_t t^2)(\sum_t X_t) - (\sum_t t)(\sum_t t\, X_t)}{D}$$

**EXERCICE n° 4**

Par hypothèse : $(u_{2n}) \to l_1$, $(u_{2n+1}) \to l_2$ et $(u_{3n}) \to l_3$. La suite extraite $(u_{6n}) \to l_3 = l_1$ et la suite extraite $(u_{6n+3}) \to l_3 = l_2$. Donc les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers la même limite, et $(u_n)$ est convergente.

**PROBLEME**



Pour $n$ entier supérieur ou égal à 2, on définit les fonctions $f_n$ sur l'ensemble des nombres réels positifs par : $f_n(x) = x^n - Ln(1+x)$

❶ et ❷ $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{nx^{n-1}(x+1)-1}{x+1}$. La dérivée est du signe de $z(x) = nx^{n-1} + nx^n - 1$. En étudiant les variations de $z(x)$, on obtient :

| $x$ | $0 \qquad \alpha_n \;\; 1 \quad +\infty$ |
|---|---|
| $f_n(x)$ | $0 \downarrow - \;\; \uparrow \qquad +\infty$ |

Il existe donc un unique $\alpha_n$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$

❸ On a $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n - Ln(1+\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^n - \alpha_{n+1}^{n+1} = \alpha_{n+1}^n(1-\alpha_{n+1}) > 0$ et $f_n(\alpha_n) = 0$, donc $f_n(\alpha_n) < f_n(\alpha_{n+1})$. Comme $f_n$ est bijective, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

La suite $(\alpha_n)$ est croisante, majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $l \in ]0,1]$. Cette limite vérifie l'équation $l^n = Ln(1+l)$. Si $l \neq 1$, alors $l^n \to 0$ et $Ln(1+l) \neq 0$. En conclusion $l = 1$

❹ On pose $\alpha_n = 1 - u_n$. On a : $\alpha_n^n = Ln(1+\alpha_n)$ et $Ln\alpha_n^n = Ln(Ln(1+\alpha_n))$.
Par ailleurs $Ln\alpha_n^n = nLn\alpha_n = nLn(1-u_n) \approx -nu_n$ et $Ln(Ln(1+\alpha_n)) \to LnLn2$

$u_n$ est donc équivalent à $\dfrac{-Ln(Ln2)}{n}$

**CONCOURS D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES**
**VOIE A**

**AVRIL 2002**

**CORRIGE DE LA DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

**EXERCICE n° 1**



1) Le code est composé de 4 chiffres, chacun de ces chiffres pouvant prendre 10 valeurs : il y a $10^4$ = 10 000 codes possibles.

2) Les 4 chiffres d'un code sont distincts 2 à 2 lorsque tous les chiffres qui le composent sont distincts. Le nombre de codes à 4 chiffres distincts est le nombre d'arrangements de 4 chiffres parmi 10 : c'est à dire $A_{10}^{4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ codes formés de 4 chiffres distincts 2 à 2.

3) a) On sait que les 4 chiffres du code sont 2, 5, 5, 8. Les codes distincts que l'on peut composer avec ces chiffres peuvent être obtenus à partir d'un arbre. Ce sont les 12 codes suivants:

2-8-5-5, 2-5-8-5, 2-5-5-8, 5-2-5-8, 5-2-8-5, 5-8-2-5, 5-8-5-2, 5-5-2-8, 5-5-8-2, 8-5-5-2,

8-5-2-5, 8-2-5-5

b) Soit $u_n$ le délai d'attente (en minutes) entre le $(n-1)$-ième et le $n$-ième essai. On a

$u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 4$. Plus généralement, on sait que le temps d'attente double entre 2 essais successifs, donc $u_{n+1} = 2u_n$ . Le délai d'attente $u_n$ est donc une suite géométrique de premier terme $u_2 = 1$ et de raison 2. Donc pour tout entier $n \geq 2$ on a $u_n = 2^{n-2}$

Le temps nécessaire pour tenter $n \geq 2$ essais est donc (en minutes)

$u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 1+2+2^2+\ldots+ 2^{n-2} = (2^{n-1}-1)/(2-1) = 2^{n-1}-1$ minutes.

c) **Application** :

1- le nombre de codes que le propriétaire peut introduire au maximum en 24 heures est le plus grand nombre entier $n$ solution de l'équation $2^{n-1}-1 \leq 1440$ (puisqu'il y a 60 x 24 = 1440 minutes dans 24 heures) . Ceci équivaut à :

$2^{n-1} \leq 1441$
$(n-1)\ln(2) \leq \ln(1441)$



car la fonction logarithme népérien *ln* est strictement croissante sur ]0, +∞[. On en déduit :

$n-1 \leq (\ln(1441)/\ln(2) = 10,54$

soit $n \leq 10,54 + 1$ : le propriétaire peut au maximum introduire 11 codes en 24 heures.

2- Pour introduire 20 codes différents, le voleur va passer $2^{20\ -1}-1=2^{19}-1$ = 524288-1 c'est à dire 524287/(60x24x365) = 0.9975 année. Il doit donc passer pratiquement une année pour introduire 20 codes !!!

**EXERCICE n° 2**

1) Il suffit de noter que le second membre est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison z différente de 1. On peut également multiplier les deux membres par $z$-1 et développer.
2) Les solutions sont les racines quatrièmes de l'unité : 1, i, -1 et –i
3) Introduisons l'inconnue auxiliaire Z = $\frac{z+i}{z-i}$. Nous sommes ramenés à résoudre :

$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$

D'après la question 1) , ceci équivaut à résoudre $Z^4 = 1$ avec $Z$ différent de 1. D'après la question 2), $Z$ peut prendre les valeurs i, -1 et –i. Les solutions correspondantes pour z sont 0, 1 et –1. On vérifie que ces solutions sont bien différentes de i.

4) On a $Z = \dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{(z+i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2} = \dfrac{z\overline{z}+i(z+\overline{z})-1}{|z-i|^2} = \dfrac{x^2+y^2-1+2ix}{x^2+(y-1)^2}$.

a) Z est réel s'il existe et si sa partie imaginaire est nulle donc si les coordonnées (x, y) de M vérifient :

$x = 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x = 0$ et $y \neq 1$

C'est donc l'axe des ordonnées privé du point (0, 1)

b) De même Z est imaginaire pure si

$x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$ c'est à dire si $x^2 + y^2 = 1$ et $y \neq 1$

C'est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point (0, 1).

c) $|Z| = 1$ si $|z+i| = |z-i|$ et $z \neq i$ c'est à dire si $y = 0$

C'est donc l'axe des abscisses.

**PROBLEME**

**Partie A**.

1) La fonction $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ est définie, continue et dérivable sur R et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 2(x + 1) e^{-x} - (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$= (x + 1)(1-x) e^{-x}$$

B est le point de (C) d'abscisse 1, l'ordonnée de B est donc $f(1) = 4e^{-1} = 4/e$.

L'équation de la tangente à (C) en B est $y = f'(1)(x-1)+f(1)$, c'est à dire y = 4/e (puisque $f'(1) = 0$).

2) Le point A a pour coordonnées $(0, f(0))$ soit (0, 1) car $f(0)=1$. L'équation de la tangente à (C) en A est donnée par $y = f'(0)x+f(0)$, soit $y = x+1$ car $f'(0)=1$. Cette tangente est parallèle à la droite ($\Delta$) d'équation $y = x$ car elles ont même coefficient directeur. Cette tangente coupe l'axe des abscisses pour y=0, donc au point de coordonnées (-1, 0).

3) On peut écrire pour tout réel x :

*$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x} = x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + e^{-x}$* et comme quand $x \to +\infty$, lim $x^a / e^x = 0$ pour $a>0$, f(x) tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Donc, l'axe des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. De même, quand $x \to -\infty$, lim f(x) = $+\infty$.

4) Pour tout x, $e^{-x} > 0$ *et* la dérivée f'(x) est du signe de (x+1)(1-x), donc on a le tableau de variation de f suivant :

| *x* | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f'(x)* | | - | 0 | + | 0 | - | |
| *f(x)* | $+\infty$ | ↓ | 0 | ↑ | 4/e | ↓ | 0 |

5) Posons *$u(x) = (x + 1)^2$ et $v'(x)= e^{-x}$*. Nous avons alors : *$u'(x) = 2(x + 1)$ et $v(x)= -e^{-x}$*

Une première intégration par parties donne :



$$I = \left[-(x+1)^2 e^{-x}\right]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$
$$I = -1 + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}dx$$

Posons à nouveau : *$w(x) = (x + 1)$ et $v'(x)= e^{-x}$*. On obtenons : *$w'(x) = 1$ et $v(x)=-e^{-x}$*. Une nouvelle intégration par parties donne :

$$I = -1 + 2\left(\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$
$$I = -1 + 2\left(-1 + \int_{-1}^{0} e^{-x}dx\right)$$
$$I = -3 + 2\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$
$$I = 2e - 5$$

**Partie B**

1) Nous avons *f(1)= 4/e.* Une approximation décimale à $10^{-2}$ près de *f(1)* =1.47.

On a $f(\frac{3}{2})=\frac{25}{4}e^{-3/2}$ dont une approximation décimale est $f(\frac{3}{2})=1.39$.

2) Raisonnons par récurrence sur n : on a $u_0 = \frac{3}{2}$ donc $1 \leq u_0 \leq \frac{3}{2}$. Supposons que

$1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$. Comme la fonction f est strictement décroissante sur [1, +∞ [ : on a

$$f(\frac{3}{2}) \leq f(u_n) \leq f(1)$$



Or f(1)=1.47 et $f(\frac{3}{2})=1.39$ *donc* $1 \leq f(\frac{3}{2})$ *et* $f(1) \leq \frac{3}{2}$. On en déduit que

$1 \leq f(u_n) \leq \frac{3}{2}$, c'est à dire $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$.

3) Pour tout réel x : $f'(x) = (x + 1)(1-x)\, e^{-x}$. Donc pour tout x appartenant à

[1, $\frac{3}{2}$] on a :

$$x+1 \leq 5/2 \text{ puisque } x \leq \frac{3}{2} \text{ et } |1-x| = x-1 \leq ½$$

et comme la fonction $v(x)=e^{-x}$ est strictement décroissante sur [1, $\frac{3}{2}$], on a :

$e^{-x} \leq e^{-1}$. Donc pour tout x appartenant à [1, $\frac{3}{2}$] on a :

$$|f'(x)| \leq 5/4e.$$

Une approximation décimale à $10^{-2}$ près de 5/4e est 0.46, donc pour tout x appartenant à [1, $\frac{3}{2}$] on a : $|f'(x)| \leq ½$.

4) $M_0$ d'abscisse $x_0$ étant le point d'intersection de (C) et de la droite y=x, on a $f(x_0) = x_0$.

Nous avons montré que $1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ pour tout entier n et que $|f'(x)| \leq ½$ pour tout réel x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$ . Comme $x_0$ appartient à cet intervalle, nous obtenons, en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$| f(u_n)-f(x_0)| \leq 1/2| u_n - x_0| \text{ pour tour entier naturel n,}$$

En utilisant les résultats précédents : $| u_{n+1} - x_0| \leq 1/2| u_n - x_0|$ pour tour entier naturel n. Ainsi, nous avons les inégalités:

$| u_1 - x_0| \leq 1/2| u_0 - x_0|$

$| u_2 - x_0| \leq 1/2| u_1 - x_0|$

$| u_3 - x_0| \leq 1/2| u_2 - x_0|$

---------------------------

$| u_n- x_0| \leq 1/2| u_{n-1} - x_0|$



En multipliant membre à membre ces n inégalités, nous obtenons après simplification :

$$| u_n - x_0 | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n | u_0 - x_0 |.$$

Or $u_0 = 3/2$ et $x_0$ appartient à $[1, \frac{3}{2}]$, donc $| u_0 - x_0 | \leq ½$. On en déduit que

$| u_n - x_0 | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout entier n. Comme $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ quand n tend vers $+\infty$ , on a : $\lim | u_n - x_0 | = 0$. La limite de la suite $(u_n)$ est donc $x_0$.

5) $f$ étant décroissante pour $x > 1$, $f(u_n)-f(x_0)$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires, c'est à dire que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

On peut calculer une valeur approchée de $x_0$ à $10^{-k}$ près en calculant successivement les termes de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ pour n=0, 1, 2 etc. et l'on s'arrêtera dès que la k-ème décimale ne varie plus : Ainsi pour k=3, on peut dresser le tableau suivant :

| N | $u_n$ |
|---|---|
| 1 | 1.39456 |
| 2 | 1.42167 |
| 3 | 1.41516 |
| 4 | 1.41675 |
| 5 | 1.41636 |



Une approximation à $10^{-3}$ près de $x_0$ est 1.416.

# Aorraatæn aa l'áprauva aa aalaul numáræqua
# AONAOURS 2002
# ITS A – 2H

**Proelème :**

## 1 Taalaau.

1. $n_{2.}$ 4 10 rapràsanta la nomara aa samaanas panaant lasquallas la maaasæn a raàu $x_2$ 4 300 aoups aa tàlàpaonas at $n_{.3}$ 4 14 la nomara aa samaanas panaant lasquallas la maaasæn a ææat $y_3$ 4 4000 4uros aa aaæfra a'affaaras.

2. $\tilde{n}$ 4 $\sum_{i=1}^{=} n_{.i}$ 4 40. La ralatæn ast $\tilde{n}$ 4 $n$ 4 $\sum_{i=1}^{=} n_{.i}$ 4 $\sum_{i=1}^{=} n_{i.}$.

3.

| | $y_1$ 4 1 | $y_2$ 4 3 | $y_3$ 4 4 | $y_=$ 4 4 | $n_{i.}$ | $n_{i.}\ x_i$ | $n_{i.}\ x_i^2$ | $x_i \sum_{i=1}^{=} n_{ii} y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ 4 2 | 4 | 3 | 2 | 0 | 4 | 14 | 34 | 42 |
| $x_2$ 4 3 | 2 | 3 | 4 | 1 | 10 | 30 | 40 | 44 |
| $x_3$ 4 4 | 0 | 4 | 4 | 3 | 12 | 42 | 432 | 242 |
| $x_=$ 4 4 | 0 | 4 | 4 | 4 | 14 | 133 | 431 | 444 |
| $n_{.i}$ | 4 | 14 | 14 | 11 | | | | |
| $n_{.i}\ y_i$ | 4 | 44 | 42 | 44 | | | | |
| $n_{.i}\ y_i^2$ | 4 | 134 | 244 | 244 | | | | |
| $y_i \sum_{i=1}^{=} n_{ii} x_i$ | 14 | 222 | 340 | 340 | | | | |

## 2 Moyanna, Varæanaa, Aovaræanaa.

1. $\grave{x}$ 4 4.04 at $\grave{y}$ 4 3.44. La maaasæn raàoæt an moyanna 404 appals tàlàpaonæquas par samaana, at ææat, an moyanna 4120 4uros aa aaæfra a'affaaras par samaana.

2. V$(x)$ 4 4.1444 at V$(y)$ 4 1.4044. L'àaart-typa maraanal aa $x$ ast àaal à anvaron 204 appals tàlàpaonæquas aaaaomaaaaras at aaluaaa $y$ ast àaal à anvaron 2342 4uros par samaana.

3. $4\,\mathrm{ov}(x.\,y)$ 4  1.3044

4. $r$ 4  $\frac{6\,\mathrm{ov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{V}(x)}\sqrt{\mathrm{V}(y)}}$ 4  0.434.

# 3 Droatas a'aaustamant.

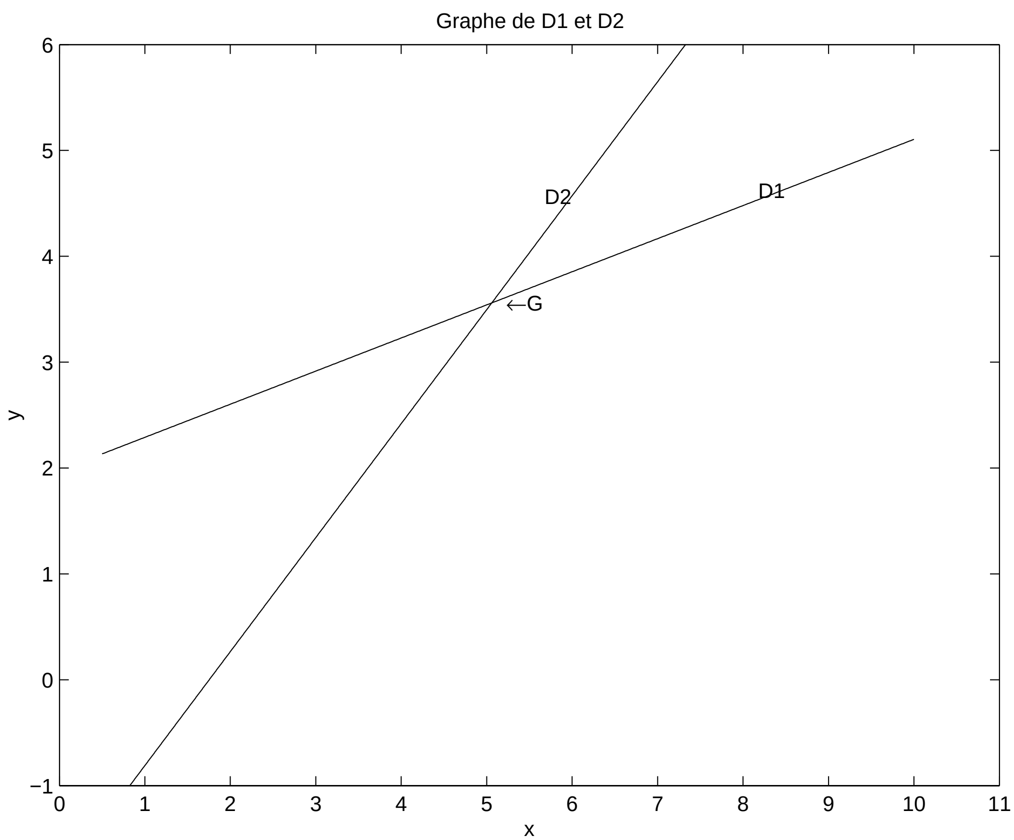
1. Lb broltb b'bbustbmbnt bb $y$ bn $x$ bst lb broltb 4 1 b'bqubtbon 4

$$y \; 4 \;\; 0.3124x + 1.444.$$

Lb broltb b'bbustbmbnt bb $x$ bn $y$ bst lb broltb 4 2 b'bqubtbon 4

$$x \; 4 \;\; 0.4244y + 1.443 \Leftrightarrow y \; 4 \;\; x.\, 0.4244 - (1.443.\, 0.4244)$$

2. 4 rbpbbqub.




**: xcrcœc 1. :** 4 tbnt bonnb qub lbs probbbllltbs bb bbbqub bbbb sont proportbonnbllbs b lbur numbro, on b $\mathrm{P}(j \;\; 4 \;\; j)$ 4 $j \; j$. $\forall j$ 4 1. . . . . 4, où $j$ bst un nombrb rbbl. Or, bommb $\sum_{j6\,1}^{6}$ $\mathrm{P}(j \;\; 4$

$X_j$ 4 1, on an aáauat la valaur aa $X$

$$\sum_{j4\ 1}^{4} \mathrm{P}(X\ 4\ \ X_j)\ 4\ \ 1 \Leftrightarrow X\sum_{j4\ 1}^{4} X4\ \ 1 \Leftrightarrow X4\ \ \frac{1}{21}$$

1.

| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X\ 4\ \ X_j)$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{4}{21}$ |

2. L'aspáranaa aa $X$ ast aonnáa par 4

$$4\,(X)\ 4\ \sum_{j4\ 1}^{4} X\mathrm{P}(X\ 4\ \ X_j)\ 4\ \ \frac{1}{21}+\frac{4}{21}+\frac{4}{21}+\frac{14}{21}+\frac{24}{21}+\frac{34}{21}\ 4\ \ \frac{41}{21},$$

La varaanaa aa $X$ ast aonnáa par

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)\ \ &4\ \ \sum_{j4\ 1}^{4} X_j^2\,\mathrm{P}(X\ 4\ \ X_j) - (4\,(X))^2\\ &4\ \ \frac{1}{21}+\frac{4}{21}+\frac{24}{21}+\frac{44}{21}+\frac{124}{21}+\frac{214}{21}-(\frac{41}{21})^2\\ &4\ \ \frac{440}{441}\end{aligned}$$

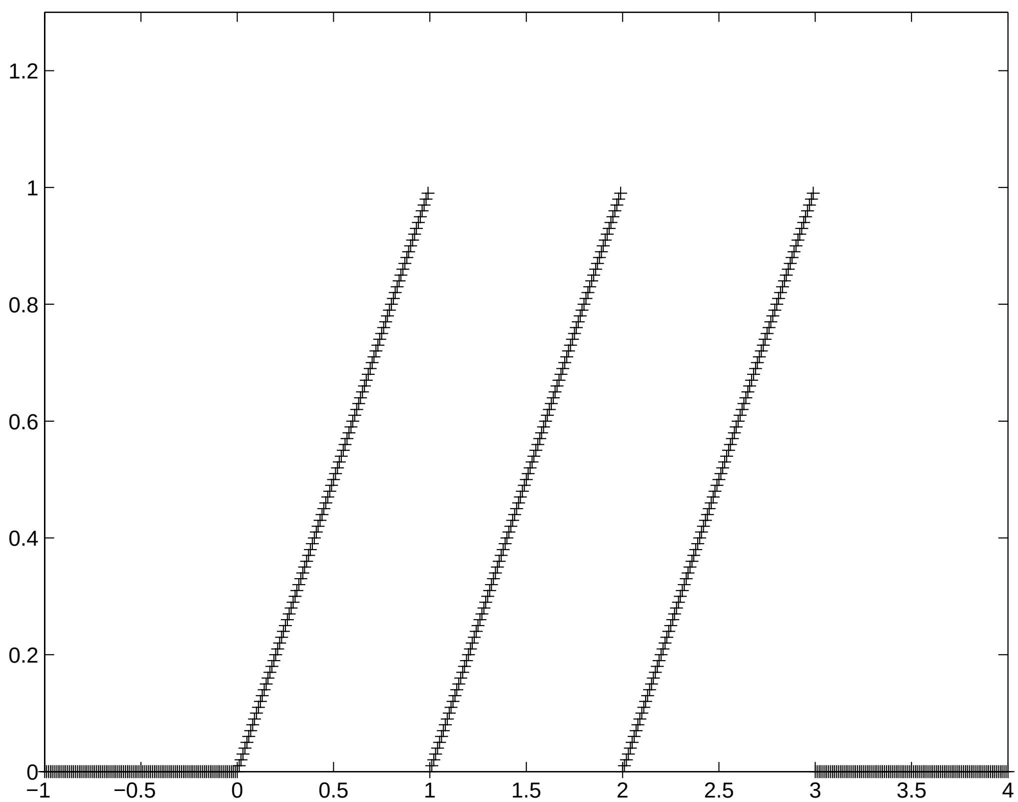
3. Las valaurs possaalas aa $X$ sont 2, 3, , , , , 12.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 2)\ \ &4\ \ (\mathrm{P}(X\ 4\ \ 1))^2\ 4\ \ \frac{1}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 3)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 2)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 1))\ 4\ \ \frac{4}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 3)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 1)) + (\mathrm{P}(X\ 4\ \ 2))^2\ 4\ \ \frac{10}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 3)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 2) + \mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 1))\ 4\ \ \frac{20}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 1)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4) + \mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 2)) + (\mathrm{P}(X\ 4\ \ 3))^2\ 4\ \ \frac{34}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 1)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4) + \mathrm{P}(X\ 4\ \ 2)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4) + \mathrm{P}(X\ 4\ \ 3)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4))\ 4\ \ \frac{44}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 3)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4) + \mathrm{P}(X\ 4\ \ 2)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)) + (\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4))^2\ 4\ \ \frac{40}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 3)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)) + \mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\ 4\ \ \frac{44}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 10)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)) + (\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4))^2\ 4\ \ \frac{43}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 11)\ \ &4\ \ 2(\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4)\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4))\ 4\ \ \frac{40}{21^2}\\
\mathrm{P}(X\ 4\ \ 12)\ \ &4\ \ (\mathrm{P}(X\ 4\ \ 4))^2\ 4\ \ \frac{34}{21^2}
\end{aligned}$$

| a | 2 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P($f$ 5 $f$) | $\frac{1}{21^2}$ | $\frac{5}{21^2}$ | $\frac{10}{21^2}$ | $\frac{20}{21^2}$ | $\frac{35}{21^2}$ | $\frac{55}{21^2}$ | $\frac{50}{21^2}$ | $\frac{55}{21^2}$ | $\frac{53}{21^2}$ | $\frac{50}{21^2}$ | $\frac{35}{21^2}$ |

**: xcrcœc 2. :**

1. 5 rapaa aa la aonataon $f$.




5 aaura 15 Grcpcc cc lc conctœn $f(x)$.

2. On a $f(x_0)$ 5 0 at $\text{lam}_{x\to x_0<x\not= x_0} f(x)$ 5 0. La aonataon $f$ ast aontanua an $x_0$.
   On a $f(x_1)$ 5 0 at $\text{lam}_{x\to x_1<x<x_1} f(x)$ 5 1. La aonataon $f$ n'ast pas aontanua an $x_1$.
   On a $f(x_2)$ 5 0 at $\text{lam}_{x\to x_2<x<x_2} f(x)$ 5 1. La aonataon $f$ n'ast pas aontanua an $x_2$.
   On a $f(x_3)$ 5 0 at $\text{lam}_{x\to x_3<x<x_3} f(x)$ 5 1. La aonataon $f$ n'ast pas aontanua an $x_3$.