AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATICS

Exercice n° 1

1. La dérivée de la fonction f est égale à : $f'(x)=\dfrac{e^x \sin x}{(1+e^x)^2}+\dfrac{e^x \cos x}{1+e^x}$

2. $\int_0^3 E(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx+\int_1^2 dx+\int_2^3 2dx=1+2=3$

3. Soit x l'âge de Michel, y celui de Paul et z celui de Pierre. On a :
$x=y+3,\ x=z+7,\ x+y+z=101$, d'où $z=30\ (x=37, y=34)$

4. De ce système : $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$, on obtient $x=\dfrac{12-3y}{2}$ et on remplace dans la première équation pour obtenir : $5y^2-72y+124=0$. Les solutions sont :
$(x=3, y=2)$ et $(x=-63/5, y=62/5)$

5. Soit la fonction f définie par $f(x)=x^6+x^4+x^2+1$. Il est évident que $f(x)>0$ pour tout x, donc l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution.

6. La suite (u_n) définie par : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{e}$ est une suite géométrique dont la raison est strictement inférieure à 1. Elle converge donc vers 0.

7. La variation du pouvoir d'achat de votre salaire durant cette période est égale à +12% ($\dfrac{1{,}40}{1{,}25}=1{,}12$).

8. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^n x^k\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left[\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{k+1}=+\infty$

9. La moyenne de l'ensemble des candidats est égale à :

$$\frac{6\times10+3\times8+1\times12}{10}=9{,}6$$

10. $\sum_{k=1}^n(x_k-\bar{x})=\sum_{k=1}^n x_k-n\bar{x}=n\bar{x}-n\bar{x}=0$

Exercice n° 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

1. Cette fonction est définie pour tout nombre réel, sa dérivée est égale à $f'(x) = xe^{-x}(2-x)$. Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	$+$	0	-	
y	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$4/e^2$	$\downarrow$	0

2. La convexité de f est étudiée à partir des valeurs qui annulent sa dérivée seconde. On a $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$. Cette dérivée s'annule pour $x = 2 \pm \sqrt{2}$. La fonction est convexe sur les intervalles : $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right]$ et $\left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$

3.
$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-e^{-x}x^2\right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x}dx = -\frac{1}{e} + 2\left[-e^{-x}x\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x}dx = -\frac{5}{e} + 2$$

Docs à portée de main

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = x^2(x-1)g(x)$$

où $g(x)$ est la fonction indicatrice des nombres rationnels (Q)

1. Soit x un nombre rationnel, alors la suite $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est une suite de nombres irrationnels qui converge vers x.

2. Etude de la continuité de g sur R.

En un point $x \in R - Q$, $g(x) = 0$ et il existe une suite de nombres rationnels x_n qui converge vers g (Q est dense dans R), donc $g(x_n) = 1$ et g n'est pas continue en x.

En un point $x \in Q$, $g(x) = 1$ et il existe une suite de nombres irrationnels x_n qui converge vers g (question 1), donc $g(x_n) = 0$ et g n'est pas continue en x.

En conclusion g n'est continue en aucun point.

3. Etude de la continuité de f sur R.

Le raisonnement est identique à celui de la question précédente à savoir que tout nombre réel est à la fois limite d'une suite de nombres rationnels et de nombres irrationnels. f est donc seulement continue en 0 et 1.

4. Etude de la dérivabilité de f sur R. Seuls les points 0 et 1 peuvent être des points de dérivabilité pour f.

En 1, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = x^2 g(x)$ et cette expression n'admet pas de limite quand $x \to 1$ (distinguer les cas rationnels et irrationnels).

En 0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = x(x-1)g(x)$ qui tend vers 0 et f est dérivable en zéro avec une dérivée égale à 0.

Exercice n° 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}+1}$ et $u_0 = 1$

1. On vérifie par récurrence que la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

2. Si la suite (u_n) converge, sa limite l vérifie le théorème du point fixe, $l = \dfrac{l+2}{l+1}$ et on trouve $l = \sqrt{2}$

3. La fonction f est une fonction homographique décroissante qui admet les droites $x = -1$ et $y = 1$ comme asymptotes.

4. L'aire comprise entre l'axe *Ox*, le graphe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à

$$\int_1^2 \frac{x+2}{x+1}dx = \int_1^2 (1+\frac{1}{x+1})dx = \left[x + Ln(x+1)\right]_1^2 = 1 + Ln(3/2)$$

5. Comme la fonction f est décroissante, la suite (u_n) n'est pas monotone, mais les suites extraites de rang pair et impair sont monotones. La suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ (on le vérifie par récurrence à partir de u_1) et la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Ces deux suites sont adjacentes et (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice n° 5

Pour tout entier p strictement positif, on pose :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}, \text{ puis } \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$$

1. On a, en posant $t = x + p$,

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{x+p}dx = \frac{1}{p}\int_p^{p+1} \frac{t-p}{t}dt = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = u_p$$

2. On a : $\frac{1}{p+1} \le \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \le \frac{1}{p}$, d'où $0 \le u_p \le \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

On en déduit que $0 \le \gamma_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \le \sum_{p=1}^{n} (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \le 1$

et $\gamma_{n+1} - \gamma_n = u_{n+1} \ge 0$, la suite γ_n est croissante et majorée donc elle converge.

Exercice n° 6

1. Soit $y = f(x) - g(x) = Ln(x+e) - \sqrt{x+1}$ sur R^+, sa dérivée est $y' = \frac{2\sqrt{x+1} - (x+e)}{2\sqrt{x+1}(x+e)}$, elle est du signe du numérateur. Soit $z = 2\sqrt{x+1} - (x+e)$ dont la dérivée $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$ est toujours négative, et y' aussi, donc y est décroissante et négative. En conclusion : $f(x) \le g(x)$.

2.

$$I_n = \int_0^n (\sqrt{x+1} - Ln(x+e))dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^n - \int_e^{n+e} Lnt\,dt = \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1) - [tLnt - t]_e^{n+e}, \text{ d'où}$$

$I_n = \frac{2}{3}((n+1)^{3/2} - 1) - (n+e)Ln(n+e) + (n+e)$ et $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$.

3. On a, pour x positif, $f(x)$ et $g(x)$ minorés par 1 donc les valeurs $\frac{1}{f(x)}$ et $\frac{1}{g(x)}$ sont comprises entre zéro et 1 et peuvent correspondre à des probabilités. D'après la première question, $f(x) \leq g(x)$ et A a plus de chances de gagner la course.

Exercice n° 7

Soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

1. Posons $f_n(x) = x^n + x - 1$, alors $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} + 1$.

f_n est continue, strictement croissante et réalise une bijection de R^+ sur $[-1, +\infty[$, $f_n(0) = -1$, il existe donc une unique solution x_n ; de plus $f_n(1) = 1$, donc $x_n \in]0,1[$.

2. Si $x_{n+1} < x_n$, alors $x_{n+1}^{n+1} < x_{n+1}^n < x_n^n$ (car $x_n \in]0,1[$)

et $x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$, ce qui est absurde. La suite (x_n) est donc croissante et majorée, elle converge vers une limite l. Si $l < 1$, alors par passage à la limite dans l'équation, $l - 1 = 0$, ce qui est absurde, donc $l = 1$.