AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CORRIGE DE LA 1ère COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x=0$, la dérivée de : $\dfrac{x\,e^x}{1+x^2}$

La dérivée est égale à : $\dfrac{(1-x^2)\,e^x}{(1+x^2)^2}+\dfrac{\mathrm{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1+\mathrm{x}^2}$, puis pour $x=0$, on obtient 1

2. Calculer $I=\int_{-1}^{1} x^2 \sin x \; dx$

Comme la fonction est impaire, l'intégrale est nulle.

3. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} e^{x+y}=\sqrt{e^3} \\ x^2+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Le système devient : $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{2} \\ x^2+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$, soit $x(x-1)=0$. L'ensemble des solutions est : $(x,y)=(0,3/2)$ *ou* $(1,1/2)$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $2x+1+\int_0^1 \dfrac{t^2\,e^t}{t^2+2}dt=0$

L'intégrale ci dessus est un nombre réel, donc il n'y a qu'une solution.

5. Calculer $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x^x}{1+x}$

$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x^x}{1+x} = \lim\limits_{x \to 0+} e^{x \, Ln \, x} = 1$

6. Dans un repère orthonormé de l'espace R^3, déterminer un vecteur orthogonal au plan d'équation : $3x - 5y + 2z - 4 = 0$. Le vecteur $u(3,-5,2)$ est orthogonal.

7. Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3$

où k est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local ?
On a : $f^{'}(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$ et $f^{'}(0) = 0$

De plus $f^{''}(x) = 2(1-k)^3 + 6(1+k)x$ et $f^{''}(0) = 2(1-k)^3$

L'origine est un extremum local si et seulement si $k \neq 1$

8. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x+2} \, dx$

On a (par division euclidienne) : $\frac{2x^2 + 3x}{x+2} = 2x - 1 + \frac{2}{x+2}$

D'où $I = \left[x^2 - x + 2Ln\,(x+2)\right]_0^1 = 2\,Ln\left(3/2\right)$

9. Dans une population de lycéens, 30 % font du sport hors du lycée. Parmi les sportifs, 15 % font du volley, 20 % de la natation, et 5 % font à la fois du volley et de la natation. Quel est le pourcentage de lycéens faisant du volley, mais pas de natation ?

On a : 15%-5%=10% des 30%, soit 3%

10. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$, où n est un entier naturel non nul et $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n. En développant par la formule du binôme,

$(1-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$

Exercice n° 2

On définit, sur *R*, la fonction G_k par : $G_k(x) = e^{-k x^2}$, où k est un nombre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de G_k.

La fonction est paire, donc son graphe sera symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et on en fait l'étude que pour les réels positifs.
On obtient : $G_k^{'}(x) = -2kx\, e^{-k x^2}$ et la fonction est décroissante à valeurs dans l'intervalle 0,1.
L'axe des abscisses est une asymptote.

2. Résoudre l'équation : $G_k^{''}(x) = 0$

$G_k^{''}(x) = 2k\, e^{-kx^2}\,(2k^2x^2 - 1)$
Cette fonction s'annule pour $x = \mp 1/2K$

3. Tracer le graphe de G_k pour *k*= ½ et *k*=1. On obtient une courbe de Gauss qui est plus étalée pour *k*= ½ que pour *k*=1.

4. On suppose *k*= ½ . Soit a la solution positive de l'équation $G_k^{''}(x) = 0$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de G_k au point d'abscisse *a*.

Pour *k*= ½, *a*=1. L'équation de la tangente est donnée par : $y = G_k(1) + G_k^{'}(1)(x-1)$, soit $y = \dfrac{2-x}{\sqrt{e}}$

Exercice n° 3

Soit $f : [a,b] \to R$, une application continue telle que : $\int_a^b f(t)\; g(t)\,dt = 0$ pour toutes fonctions en escalier *g*, définies sur $[a,b]$. Expliciter *f*.
Si *f* est non nulle sur $[a,b]$, il existe un *x* tel que *f(x)*>0 (sinon on change *f* en –*f* et les hypothèses restent valables). Comme *f* est continue, il existe un voisinage (un intervalle) de cet *x* sur lequel la fonction reste strictement positive. On considère alors la fonction *g* en escalier égale à 1 sur cet intervalle et 0 ailleurs, alors l'hypothèse $\int_a^b f(t)\; g(t)\,dt = 0$ n'est plus vérifiée. Par conséquent, *f*=0.

Exercice n° 4

Soit la suite (F_n) définie par :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ et } F_1 = -3 \,;\, F_2 = 2$$

1. Exprimer $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1}$ en fonction de *n*.

On trouve, $F_3 = 1$; $F_4 = -1$. Montrons par récurrence que : $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1} = (-1)^n$
Cette relation est vérifiée pour *n*=2 et *n*=3, puis on suppose que cette relation est vraie jusqu'à l'ordre *n*+1.

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+2} \times F_n = (F_{n+1})^2 - F_n\,(F_{n+1} + F_n) = (F_{n+1})^2 - F_{n+1} \times F_n - F_n^2$$

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+2} \times F_n = (F_{n+1})^2 - F_{n+1} \times F_n + (-1)^{n+1} - F_{n-1} \times F_{n+1} =$$

$$(F_{n+1})^2 - F_{n+1}\,(F_n + F_{n-1}) + (-1)^{n+1} = (F_{n+1})^2 - (F_{n+1})^2 + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}$$

2. La suite (F_n) est-elle convergente ?

Si la suite (F_n) converge vers une limite *l,* alors *l* serait solution de $l^2 - l \times l = Lim\,(-1)^{n+1}$ qui n'existe pas. Par conséquent la suite est divergente.

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f à valeurs réelles définie par:

$$f(x) = x^2 \times Ln(x^2 + 1)$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et *Ln* désigne le logarithme népérien.

1.Etudier les variations de la fonction f et tracer *C*.

On peut remarquer que la fonction est paire et l'étudier que sur les réels positifs.

La dérivée de *f* est égale à : $f'(x) = 2x \times Ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x^3}{1 + x^2} \geq 0$

La fonction est donc strictement croissante sur R_+, elle admet une branche parabolique dans la direction oy et est convexe.

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

On calcule cette intégrale par parties : $I = \int_0^1 x^2 \, Ln(1+x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} Ln\,(1+x^2)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}$

Par ailleurs, $\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$

D'où $\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} = \left[\frac{x^3}{3} - x + Arctg(x)\right]_0^1 = -2/3 + \pi/4$

On obtient finalement : $I = \int_0^1 x^2 \, Ln(1+x^2)\,dx = \frac{Ln\,2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}) = \frac{Ln\,2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{\pi}{6}$

3. On considère la fonction numérique f_n à valeurs réelles définie par:

$f_n(x) = x^n \times Ln(x^2+1)$, où n est un entier strictement supérieur à 2.

Etudier les variations de la fonction f_n et tracer son graphe.

Si n est pair, la fonction est également paire, de même si n est impair, la fonction est impaire, d'où l'étude que sur les réels positifs.

La dérivée est égale à : $f_n^{'}(x) = nx^{n-1} \times Ln(x^2+1) + \frac{2x^{n+1}}{1+x^2} = x^{n-1} \times \frac{n(1+x^2)\,Ln(1+x^2) + 2x^2}{1+x^2}$

La fonction est donc strictement croissante sur R_+, elle admet une branche parabolique dans la direction Oy et est convexe. La symétrie étant différente selon la parité de n.

4. Calculer $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ en fonction de n (entier naturel). On calculera d'abord J_0, J_1 et J_2.

$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [Arctg\,x]_0^1 = \pi/4$; $J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}[Ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{Ln2}{2}$;

Et $J_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = [x - Arctg\,x]_0^1 = 1 - \pi/4$

On vérifie par récurrence les expressions suivantes :

$$\frac{x^{2n}}{1+x^2} = x^{2n-2} - x^{2n-4} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{1}{1+x^2} \quad et \quad \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} = x^{2n-1} - x^{2n-3} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{x}{1+x^2}$$

$$J_{2n} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n \pi / 4$$

$$J_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n Ln2/2$$

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$ en fonction de n.

Par intégration par parties : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx = \left[\frac{x^{n+1} Ln(1+x^2)}{n+1} \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx$

$$I_n = \frac{Ln\,2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

Il suffit alors de remplacer la deuxième intégrale par sa valeur trouvée à la question précédente, pour obtenir :

$$I_{2n} = \frac{Ln\,2}{2n+1} - \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + ... + (-1)^n + (-1)^{n-1} \pi / 4\right)$$

$$I_{2n-1} = \frac{Ln\,2}{2n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + ... + (-1)^{n+1} + (-1)^n Ln2/2\right)$$

Exercice n° 6

1. Ecrire le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de l'origine, à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

2. En déduire le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de l'origine à l'ordre 3.

On peut soit dans l'expression précédente remplacer x par le développement de e^x ou effectuer la division du numérateur par le dénominateur. Dans les deux cas, on obtient :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

3. Soit $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$. Déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de *f* pour $x \to +\infty$

On pose $X = 1/x$ et $X \to +0$.

Alors $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}=\dfrac{1}{X(1+e^{X})}=\dfrac{1}{2X}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{X^2}{48}+o(X^2)$.

La droite $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$ est asymptote au graphe en $+\infty$.

Exercice n° 7

Soit *F* l'application numérique définie par : $F(x)=\displaystyle\int_{x}^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

1. Montrer que *F* est définie, continue et dérivable sur *R*

La fonction est définie, continue et dérivable car $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie et continue et $x \to 2x$ est dérivable.

2. Etudier la parité de *F*. En posant *t* = -*x*, on vérifie que *F* est impaire.

3. Montrer que pour tout $x>0$: $0<F(x)<\dfrac{1}{2x}$. En déduire la limite de *F* en $+\infty$

On a : $0<\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{t^4}}=\dfrac{1}{t^2}$ et par intégration $0<F(x)<\dfrac{1}{2x}$. Par conséquent: $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$.

4. Calculer la dérivée de *F* et résoudre l'équation $F'(x)=0$ pour $x>0$.

$$F'(x)=\frac{2}{\sqrt{(2x)^4+(2x)^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$F'(x)=\frac{3(1-4x^4)}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\times(\sqrt{x^4+x^2+1})(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4+4x^2+1})}$$

Cette dérivée est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

On obtient : $x^4=1/4$ et $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$