INSTITIT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1ère COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Dans toute la composition *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 0$, la dérivée de : $\dfrac{x e^x}{1+x^2}$

2. Calculer $I = \int_{-1}^{1} x^2 \sin x \, dx$

3. Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} e^{x+y} = \sqrt{e^3} \\ x^2 + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $2x + 1 + \int_0^1 \dfrac{t^2 e^t}{t^2+2} dt = 0$

5. Calculer $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x^x}{1+x}$

6. Dans un repère orthonormé de l'espace R^3, déterminer un vecteur orthogonal au plan d'équation : $3x-5y+2z-4=0$

7. Soit *f* la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x)=(1-k)^3x^2+(1+k)x^3$ où *k* est un paramètre réel. Pour quelles valeurs de k, l'origine est-elle un extremum local ?

8. Calculer l'intégrale $I=\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x+2}\,dx$

9. Dans une population de lycéens, 30 % font du sport hors du lycée. Parmi ces sportifs, 15 % font du volley, 20 % de la natation, et 5 % font à la fois du volley et de la natation. Quel est le pourcentage de lycéens faisant du volley, mais pas de natation ?

10. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$, où n est un entier naturel non nul et $\binom{n}{k}$ désigne le nombre de combinaisons de *k* éléments pris parmi *n*.

Exercice n° 2

On définit, sur *R*, la fonction G_k par : $G_k(x)=e^{-kx^2}$, où k est un nombre réel strictement positif.

1. Etudier les variations de G_k.

2. Résoudre l'équation : $G_k''(x)=0$

3. Tracer le graphe de G_k pour *k*= ½ et *k*=1. Que peut-on en déduire ?

4. On suppose *k*= ½. Soit *a* la solution positive de l'équation $G_k''(x)=0$. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de G_k au point d'abscisse *a*.

Exercice n° 3

Soit $f:[a,b]\to R$, une application continue telle que : $\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt=0$ pour toutes fonctions en escalier *g*, définies sur $[a,b]$. Expliciter *f*.

Exercice n° 4

Soit la suite (F_n) définie par :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \text{ et } F_1 = -3,\ F_2 = 2$$

1. Exprimer $(F_n)^2 - F_{n+1} \times F_{n-1}$ en fonction de n. (On pourra calculer cette expression pour $n = 2$ et $n = 3$)

2. La suite (F_n) est-elle convergente ?

Exercice n° 5

On considère la fonction numérique f à valeurs réelles définie par:

$$f(x) = x^2 \times Ln(x^2 + 1)$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal et Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de la fonction f et tracer C.

2. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,dx$

3. On considère la fonction numérique f_n à valeurs réelles définie par:

$$f_n(x) = x^n \times Ln(x^2 + 1)$$, où n est un entier strictement supérieur à 2.

Etudier les variations de la fonction f_n et tracer son graphe.

4. Calculer $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$ en fonction de n (entier naturel). On calculera d'abord J_0, J_1 et J_2.

5. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$ en fonction de n.

Exercice n° 6

1. Ecrire le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ au voisinage de l'origine, à l'ordre 3.

2. En déduire le développement limité de $\dfrac{1}{1+e^{x}}$ au voisinage de l'origine, à l'ordre 3.

3. Soit $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$. Déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de *f* pour $x \to +\infty$

Exercice n° 7

Soit *F* l'application numérique définie par : $F(x)=\displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

1. Montrer que *F* est définie, continue et dérivable sur *R*.

2. Etudier la parité de *F*.

3. Montrer que pour tout $x>0$: $0<F(x)<\dfrac{1}{2x}$. En déduire la limite de *F* en $+\infty$

4. Calculer la dérivée de *F* et résoudre l'équation $F'(x)=0$ pour $x>0$.