

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ABIDJAN

AVRIL 1998

CONCOURS D'ÉLÈVE INGÉNIEUR DES TRAVAUX STATISTIQUES

VOIE B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



PROBLÈME N°1

1. Pour tout $V = (x, y)$, on définit $N_1(V) = |x| + |y|$.

- Il est clair que pour tout V de $\mathbb{R}^2$, $N_1(V) \geq 0$.
- Soit $V = (x, y)$. Si $N_1(V) = 0$, alors $x = y = 0$ d'où $V = 0$.
- Soit $V = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$N_1(\lambda V) = |\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda||x| + |\lambda||y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda|N_1(V).$$

- Soient $V = (x, y)$ et $V' = (x', y')$. Alors :

$$N_1(V + V') = |x + x'| + |y + y'| \leq |x| + |x'| + |y| + |y'| = N_1(V) + N_1(V').$$

N_1 est donc une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. On vérifie de même pour la fonction définie pour $V = (x, y)$ par $N_\infty(V) = \sup(x, y)$.

- $\forall V \in \mathbb{R}^2$, $N_\infty(V) \geq 0$.
- Il est clair que si $N_\infty(V) = 0$, alors $V = 0$.
- Soit $V = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$N_\infty(\lambda V) = \sup(|\lambda x|, |\lambda y|) = |\lambda| \sup(|x|, |y|) = |\lambda|N_\infty(V).$$

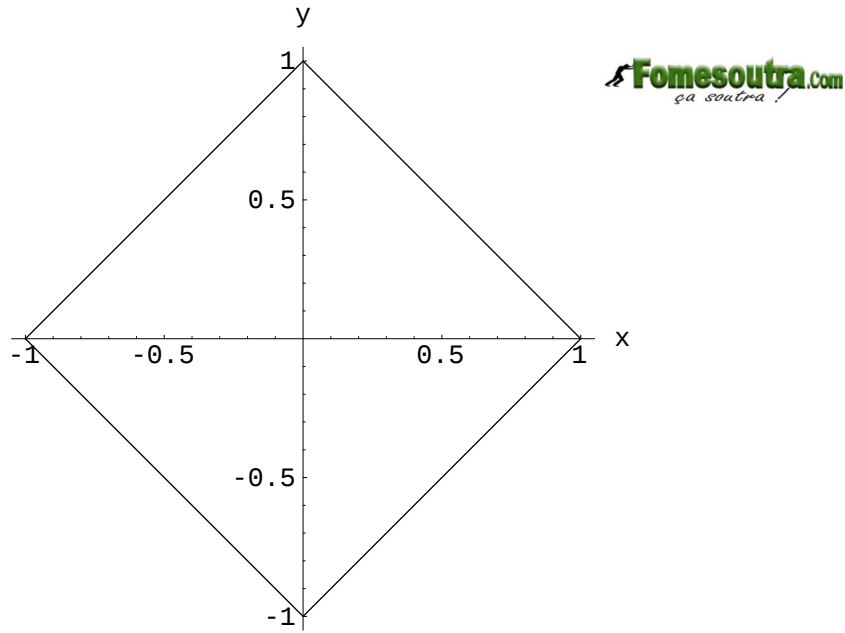


Figure 1: Sphère unité S_1

- On rappelle la propriété $\sup(a + b, a' + b') \leq \sup(a, b) + \sup(a', b')$.

Soient $V = (x, y)$ et $V' = (x', y')$:

$$\begin{aligned} N_\infty(V + V') &= \sup(|x + x'|, |y + y'|) \\ &\leq \sup(|x| + |x'|, |y| + |y'|) \\ &\leq \sup(|x|, |y|) + \sup(|x'|, |y'|) = N_\infty(V) + N_\infty(V'). \end{aligned}$$

3. $\sup(|x|, |y|) \leq |x| + |y|$ et $|x| + |y| \leq 2 \sup(|x|, |y|)$. Donc :

$$N_\infty(V) \leq N_1(V) \leq 2N_\infty(V).$$

4. On prouve que $A = 1$ et $B = 2$ sont bien les nombres recherchés par des vecteurs réalisant les inégalités.

- Pour $V = (1, 0)$ on a $N_1(V) = 1$ et $N_\infty(V) = 1$.
- Pour $V = (1, 1)$, on a $N_1(V) = 2$ et $N_\infty(V) = 1$.

5. (1) Pour $V = (x, y)$, on peut écrire :

$$V = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1).$$

L'inégalité triangulaire pour N permet d'écrire :

$$N(V) \leq |x|N(1, 0) + |y|N(0, 1).$$

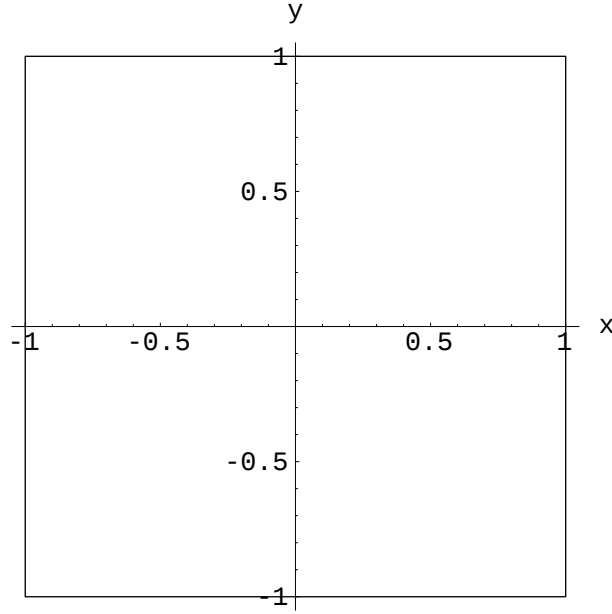


Figure 2: Sphère unité S_∞

Par conséquent :

$$N(V) \leq \sup(|x|, |y|) (N(1, 0) + N(0, 1)) = \beta N_\infty(V),$$

avec $\beta = N(1, 0) + N(0, 1)$.

- (2) N étant, on a, par définition, $\forall V \in \mathbb{R}^2$, $N(V) \geq 0$ et $N(V) = 0$ si et seulement si $V = 0$. Donc $\forall V \neq 0$, $N(V) > 0$. Comme $0 \notin S_\infty$, on en déduit :

$$\forall V \in S_\infty, \quad N(V) > 0.$$

On admet qu'il existe au moins un vecteur $V_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $V \in S_\infty$, $N(V) \geq N(V_0)$. D'après ce qui précède, $N(V_0) > 0$ donc en posant $\gamma = N(V_0)$ on obtient le résultat escompté.

- (3) Pour $V \neq 0$, $\frac{V}{N_\infty(V)} \in S_\infty$. Donc :

$$\gamma \leq N\left(\frac{V}{N_\infty(V)}\right) \leq \beta.$$

Par suite :

$$\forall V \neq 0, \quad \gamma N_\infty(V) \leq N(V) \leq \beta N_\infty(V).$$

Pour $V = 0$ cette inégalité est évidemment réalisée. Finalement :

$$\forall V, \quad \alpha N_\infty(V) \leq N(V) \leq \beta N_\infty(V), \quad \text{avec} \quad \alpha = \gamma.$$

6. D'après la question précédente, $\exists \alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$ tels que pour tout V :

$$\begin{cases} \alpha N_{\infty}(V) \leq N(V) \leq \beta N_{\infty}(V) \\ \alpha' N_{\infty}(V) \leq N'(V) \leq \beta' N_{\infty}(V) \end{cases}$$



On vérifie alors facilement que :

$$\frac{\alpha}{\beta'} N'(V) \leq N(V) \leq \frac{\beta}{\alpha'} N'(V),$$

ce qui est la propriété demandée avec $a = \frac{\alpha}{\beta'}$ et $b = \frac{\beta}{\alpha'}$.

7. Pour $V = (x, y)$, on définit $H(V) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$.

- $\forall V \in \mathbb{R}^2, H(V) \geq 0$.
- Si $H(V) = 0$, alors $\forall t \in [0, 1], |x + ty| = 0$. Pour $t = 0$ on en déduit $x = 0$. Par suite pour $t = 1$ on trouve $y = 0$. Donc $V = 0$.
- Soit $V = (x, y)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|\lambda x + t\lambda y| = |\lambda| |x + ty|$ donc $H(\lambda V) = |\lambda| H(V)$.
- Soient $V = (x, y)$ et $V' = (x', y')$. L'inégalité triangulaire pour le module permet d'écrire :

$$H(V + V') = \sup_{t \in [0,1]} |x + x' + t(y + y')| \leq \sup_{t \in [0,1]} (|x + ty| + |x' + ty'|).$$

En utilisant que le sup de la somme de deux fonctions est inférieur à la somme du sup des deux mêmes fonctions, on trouve :

$$H(V + V') \leq \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| + \sup_{t \in [0,1]} |x' + ty'| = H(V) + H(V').$$

8. Soit $H'(V) = \int_0^1 |x + ty| dt$ pour $V = (x, y)$.

- Il est clair que pour tout V de $\mathbb{R}^2$, $H'(V) \geq 0$.
- Soit V tel que $H'(V) = 0$. La fonction $t \mapsto |x + ty|$ étant continue et positive sur $[0, 1]$, son intégrale est nulle si et seulement si c'est la fonction nulle. Pour $t = 0$, on en déduit $x = 0$. Par suite on tire $y = 0$ pour $t = 1$ et donc $V = 0$.
- Enfin, il est clair par linéarité de l'intégrale et du fait que le module est une norme sur $\mathbb{R}$ que pour tout vecteur V et tout réel λ , $H'(\lambda V) = |\lambda| H'(V)$ et pour V et V' dans $\mathbb{R}^2$, $H'(V + V') \leq H'(V) + H'(V')$.

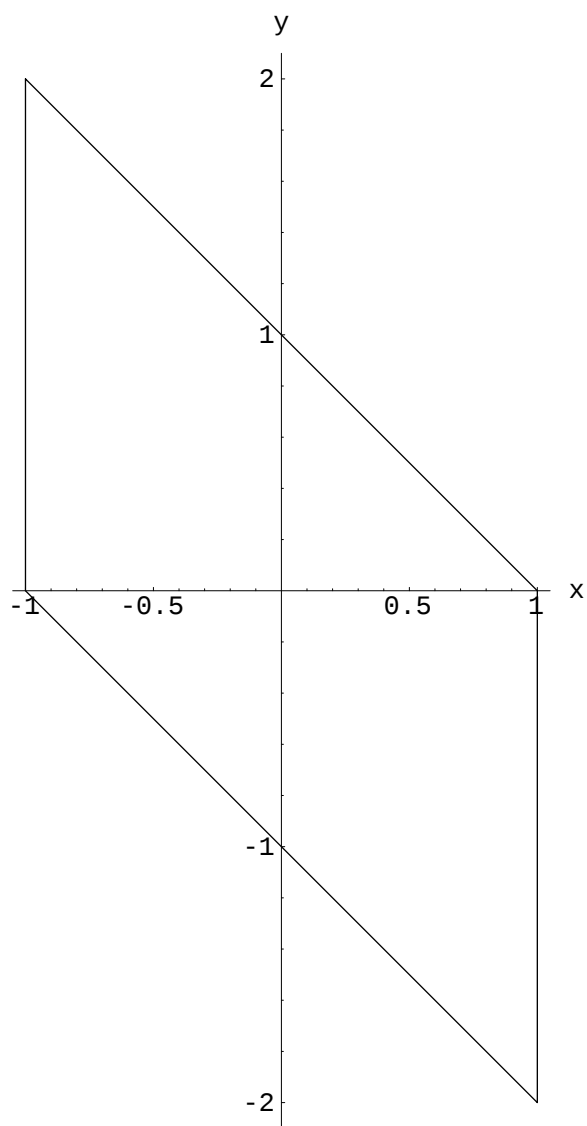


Figure 3: Sphère unité S

9. Il est clair que :

$$\forall V, \quad H'(V) \leq H(V).$$

De plus, on se rend compte graphiquement que la sphère S' contient la sphère centrée en 0 de rayon $\frac{1}{2}$ pour la norme H . Donc :

$$\forall V, \quad \frac{1}{2}H(V) \leq H'(V).$$

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !

Finalement :

$$\forall V, \quad H'(V) \leq H(V) \leq 2H'(V).$$

$H(1, 0) = H'(1, 0) = 1$ donc le vecteur $(1, 0)$ réalise l'égalité de gauche.

$H(0, 1) = 1$ et $H'(0, 1) = \frac{1}{2}$ donc le vecteur $(0, 1)$ réalise l'égalité de droite.

PROBLÈME N°2

Première partie

1. On a pour tout k dans $\mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Comme l'intégration sur une intervalle croissant conserve le sens des inégalités, en intégrant sur $[k, k+1]$, on trouve :

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

2. En sommant l'inégalité de droite sur k variant de 1 à n , on obtient :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En calculant alors l'intégrale de gauche, on trouve :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En sommant maintenant l'inégalité de gauche sur k variant de 1 à $n - 1$, on trouve :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_2^n \frac{dt}{t}.$$



Le calcul de l'intégrale permet alors d'écrire :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n.$$

En rajoutant 1 aux deux membres de l'inéquation ci-dessus, on tire donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

Finalement, on a bien l'inégalité demandée :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

3. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on déduit de l'inégalité précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty.$$

Toujours à l'aide de la même inégalité, on trouve :

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1 + \ln n}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln n}{n} = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0.$$

Deuxième partie

1. (a) L'inégalité triangulaire pour le module permet d'écrire :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p |a_k| + \sum_{k=p+1}^n |a_k| \right).$$

Comme $a_n \rightarrow 0$, on peut affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $n > p$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Cette propriété injecté dans l'inégalité ci-dessus donne :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| + \frac{n-p}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| + \frac{\varepsilon}{2},$$

qui est le résultat demandé.

(b) p étant fixé, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| = 0.$$



On en déduit l'existence de $N > p$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En remplaçant cette inégalité dans celle de la question précédente, on trouve que pour tout $n \geq N$:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Enfin, ε a été fixé arbitrairement. On a donc montré le résultat demandé :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| = 0.$$

2. En posant $a_n = b_n - b$ et en utilisant la question précédente, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (b_k - b) \right| = 0,$$

ce qui prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right| = b.$$

3. La suite $\mu_n = (-1)^n$ est divergente car (par exemple) $|\mu_{n+1} - \mu_n| = 2$ qui ne tend pas vers 0.

$\sum_{k=1}^n \mu_k$ vaut -1 si n est impair et 0 si n est pair. Dans tous les cas, on a donc :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Il est clair alors que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_k \right| = 0.$$



La suite (μ_k) est donc convergente en moyenne.

On a montré qu'une suite qui converge est convergente en moyenne mais que la réciproque est fausse!

4. (a) On a vu que la convergence entraîne la convergence en moyenne. Puisque

$$\delta_n \rightarrow c, \text{ on a également } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k \rightarrow c.$$

$$\text{Mais } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k = \frac{c_{n+1} - c_1}{n} \text{ donc } \frac{c_{n+1} - c_1}{n} \rightarrow c.$$

On en déduit alors que $\frac{c_{n+1}}{n+1} \rightarrow c$, car $\frac{c_1}{n} \rightarrow 0$. Cela équivaut naturellement à $\frac{c_n}{n} \rightarrow c$.

(b) $u_1 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

- i. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0, 1]$.
Or, il est connu que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \sin x \leq x.$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers $l \in [0, 1]$.

Comme la fonction sinus est continue et que 0 est la seule solution à l'équation $\sin x = x$, on en conclut que $l = 0$.

- ii. u_n tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. On peut donc utiliser les développements limités au voisinage de 0. Soit $r < 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^r - u_n^r &= (\sin u_n)^r - u_n^r \\ &= \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3) \right)^r - u_n^r \\ &= u_n^r \left(\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) \right)^r - 1 \right) \\ &= u_n^r \left(1 - r \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1 \right) \\ &= -r \frac{u_n^{r+2}}{6} + o(u_n^{r+2}) \end{aligned}$$

Pour $r = -2$, on trouve donc :



$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \longrightarrow \frac{1}{3} \neq 0.$$

iii. En posant $c_n = \frac{1}{u_n^2}$, on déduit de la question 4.(a) que $c_n \rightarrow \frac{1}{3}$. Par suite

$$u_n^2 \sim \frac{3}{n} \text{ et comme } u_n \geq 0, \text{ finalement } u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$