ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ECONOMIE APPLIQUEE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2006

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

$1^{ère}$ **COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Calculatrice autorisée.
Les exercices et le problème sont indépendants.

Exercice 1

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier si l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$ est définie.
2) Montrer (sans calculer sa limite) que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge.
3) Montrer (par intégration par partie) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n} I_n$$

4) En déduire une expression de I_n en fonction de I_1.

5) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{4k-1}{4k}\right)$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2+t^4} + (-1)^{n+1} B_n$ avec $B_n = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(2+t^4)(1+t^4)^n}$.

7) Montrer que $0 \leq B_n \leq I_n$. En déduire la nature et la valeur somme de la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} I_k$ en fonction de I_1.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Exercice 2

On note E_n l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à n.

1. Quel est la dimension de E_n? En donner une base. On note $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par $P_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est la primitive de P_n pour laquelle on a $\int_{-1}^{1} P_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$.
2. Déterminer P_1, P_2. Quel est le degré de P_n?
3. Montrer que si P_n est une fonction impaire, il en est de même de P_{n+2}.
En déduire que pour tout n impair > 1, $P_n(1) = 0$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_{-1}^{1} tP_n(t)\mathrm{d}t \ = \ 2P_{n+1}(1)$
5. On considère l'application de $E_n \times E_n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi \ : \ (P, Q) \ \longmapsto \ \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire dans E_n.

6. Soient m et n deux entiers tels que $m \geq n > 0$. Montrer que l'on a

$$\phi(P_n, P_m) = (-1)^{n-1} P_{m+n}(1) = \phi(P_n, P_0) = 0$$

7. On pose $A_n = vect\{P_{2k}, 0 \leq 2k \leq n\}$, l'espace vectoriel engendré par les polynomes $P_{2k}, 0 \leq 2k \leq n$. On pose de même $B_n = vect\{P_{2k+1}, 0 \leq 2k+1 \leq n\}$. Montrer que A_n et B_n sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de l'ensemble des polynomes de degré inférieur à n.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

Problème

Première partie

Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé E. Soit u une application linéaire continue de E dans E telle que $u(K) \subset K$. On note u^n la $n^{ième}$ itération de u soit $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n\ fois}$.

L'objet de cet exercice est de montrer que u a un point fixe dans K (c'est à dire il existe a dans K tel que $u(a) = a$).

1. Montrer que l'on peut toujours se ramener au cas $0 \notin K$.
2. On note S_n l'application définie sur E par

$$S_n(x) = \frac{1}{n}(x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x)),$$

pour $n \geq 1$. Montrer que $S_n(K) \subset K$.

3. Montrer que pour tout entier $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en nombre k fini,

$$S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(K) \subset S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \cdots \cap S_{n_k}(K).$$

En déduire que $A = \cap_{n \geq 1} S_n(K)$ est non vide.

4. Montrer que tout x dans A est un point fixe de u (Indication : pour $a \in A$, on montrera qu'il existe $x_n$tel que $a = S_n(x_n)$ et on calculera la norme de $u(a) - a$.)

Deuxième partie

5. Soit $||.||$ une norme sur $E = \mathbb{R}^n$ et K sa boule unité fermée. Montrer que
(i) K est symétrique,
(ii) K est convexe
(iii)K est compact
(iv) 0 est un point intérieur à K.
6. Rappellez les conditions pour que, une fonction $n(x)$ sur $E = \mathbb{R}^n$ soit une norme.
7. On suppose que K possède les quatres propriétés (i) à (iv) ci-dessus. Montrer que $p(x) = \inf\{a > 0 \ ; \ \frac{x}{a} \in K\}$ est bien définie et vérifie bien chacune des propriétés d'une norme. La vérification de chacune de ces propriétés peut se faire de manière indépendante.
8. Montrer par inclusion réciproque que K est le boule unité de la norme $p()$.