CONCOURS DIRECT D'ACCES AU CYCLE DE FORMATION
DES TECHNICIENS D'ASSAINISSEMENT
SESSION 2006

EPREUVE DE MATHEMATIQUES — DUREE : 02 heures

Exercice n° 1

1) a) Résoudre dans C l'équation : $Z^4 - 1 = 0$

b) En déduire les solutions dans C de l'équation : $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 5 cm.

a) Placer les points A, B et D d'affixes respectives $a = -2$, $b = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$ et $d = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}i$

b) Démontrer que O, A, B et D sont sur un cercle que l'on définira.

Exercice n° 2

On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$

1) a) Montrer que $I = \int_0^{\pi} \cos x\,(\cos x - \cos x \sin^2 x)\,dx$

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx - \dfrac{1}{3} I$

c) Montrer de même que $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx - \dfrac{1}{3} J$

2) a) Montrer que $I + J = \dfrac{3\pi}{4}$

b) Montrer que $I - J = 0$

c) En déduire les valeurs exactes de I et J.

Exercice n° 3

1) On considère la fonction g de $[0, +\infty[$ dans IR définie par : $g(x) = \dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)$.

a) Etudier le sens des variations de g sur son ensemble de définition Dg.

b) En déduire le signe de g sur Dg.

2) On considère la fonction f de IR vers IR définie par $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{x})$

On désigne par (C) la courbe de f dans le repère orthonormé (O, I, J).

a) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df ; en déduire les asymptotes éventuelles à (C).

b) Déterminer le sens des variations de f et construire le tableau des variations de f.

c) Construire la courbe (C) de f et ses éventuelles asymptotes.