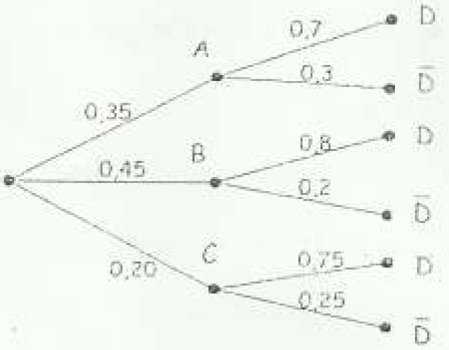
Corrigé

IMAGERIE MEDICALE 2007

Exercice 1

Appelons A, B, C les évènements « le fraudeur est contrôlé par le douanier, respectivement A,B,C »
Appelons D l'événement « le fraudeur est détecté »



1) $P(\overline{D}) = P(\overline{D}\cap A) + P(\overline{D}\cap B) + P(\overline{D}\cap C)$

$= P(A)P(\overline{D}/A) + P(B)P(\overline{D}/B) + P(C)P(\overline{D}/C)$

$= 0,35.0,3 + 0,45.0,2 + 0,20.0,25$

$P(\overline{D}) = 0,245$

2) $P(A/D) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A)\times P\left(D/_{A}\right)}{1-P(\overline{D})}$

$= \dfrac{0,35\times 0,7}{0,755} = 0,32$

Exercice 2

1) $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+2}-U_{n+1}}{U_{n+1}-U_n} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n\right)-U_{n+1}}{U_{n+1}-U_n} = \dfrac{1}{2}$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 1$:

$V_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

2) Comme $V_n = U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2^n}$ pour $n \in$ IN alors :

Corrigé

Imagérie Médicale 2007

$U_1 - U_0 = 1$

$U_2 - U_1 = \frac{1}{2}$

$U_3 - U_2 = \frac{1}{2^2}$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^n}$

En additionnant membre à membre les termes de l'égalité, on obtient :

$$U_{n+1} - U_0 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

or d'après (e), $U_{n+1} - 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \forall n \in IN$ d'où $\lim U_n = 3$

3) $|U_n - 3| < 10^{-5}$

D'après (e), on a : $U_{n+1} - 1 = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right), \forall n \in IN$ ou $U_{n+1} = 3 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow U_n - 3 = -\frac{1}{2^{n-1}}$

or $|U_n - 3| = \frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-5} \Rightarrow n - 1 > \frac{5\ln 10}{\ln 2}$

alors $n > 17{,}68$; on prendra au moins $n = 18$

Exercice 2

1) * Ensemble de définition : $D_f =]0;1[$

* détermination de la dérivée de f : $f'(x) = \frac{1}{x(1-x)}$

* Tableau de variation

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$		$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$	

2) Tracé de la courbe de f : Voir la page suivante

3) $f(x) + f(1-x) = 0$

$A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie

4) $S(\lambda) = 10 \times 5cm^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x)dx = 50cm^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} \left[\ln x - \ln(1-x)\right]dx$

Corrigé

$$S(\lambda) = 50cm^2\left[x\ln x - x - (x-1)\ln(1-x) + x\right]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} = 50cm^2\left[\lambda\ln\lambda - (\lambda-1)\ln(1-\lambda) + \ln 2\right]$$

$$\lim_{\lambda \to 1} S(\lambda) = (50\ln 2)cm^2$$