Corrigé Exercice 3

$n=2 \quad \frac{2}{2-1}-\frac{2}{3}=2-\frac{2}{3}$

$n=3 \quad \frac{2}{3-1}-\frac{2}{3+1}=1-\frac{1}{2}$

$n=4 \quad \frac{2}{4-1}-\frac{2}{4+1}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}$

$n=5 \quad \frac{2}{5-1}-\frac{2}{5+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$n=6 \quad \frac{2}{6-1}-\frac{2}{6+1}=\frac{2}{5}-\frac{2}{7}$

$n=7 \quad \frac{2}{7-1}-\frac{2}{7+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$n=8 \quad \frac{2}{8-1}-\frac{2}{8+1}=\frac{2}{7}-\frac{2}{9}$

....

$n=p-3 \quad \frac{2}{p-3-1}-\frac{2}{p-3+1}=\frac{2}{p-4}-\frac{2}{p-2}$

$n=p-2 \quad \frac{2}{p-2-1}-\frac{2}{p-2+1}=\frac{2}{p-3}-\frac{2}{p-1}$

$n=p-1 \quad \frac{2}{p-1-1}-\frac{2}{p-1+1}=\frac{2}{p-2}-\frac{2}{p}$

$n=p \quad \frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}=\frac{2}{p-1}-\frac{2}{p+1}$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{a}{n-1}+\frac{b}{n+1}=\frac{a(n+1)+b(n-1)}{n^2-1}=\frac{(a+b)n+(a-b)}{n^2-1}$, d’où

$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=4 \end{cases}$ et $a=2$; $b=-2$

$\frac{4}{n^2-1}=\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}$

$\sum_{k=2}^{n} u_k = 2+1-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=3-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}\right)=3-\frac{4n+2}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+2}{n(n+1)}\right)=$

$3-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n}{n^2}\right)=3-4\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$; $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_k\right)=3$