Corrigé Exercice 4

$n=2 \qquad \frac{1}{2-1}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$

$n=3 \qquad \frac{1}{3-1}-\frac{1}{3+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$n=4 \qquad \frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$

$n=5 \qquad \frac{1}{5-1}-\frac{1}{5+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$

$n=6 \qquad \frac{1}{6-1}-\frac{1}{6+1}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$

$n=7 \qquad \frac{1}{7-1}-\frac{1}{7+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$

$n=8 \qquad \frac{1}{8-1}-\frac{1}{8+1}=\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$

....

$n=p-3 \qquad \frac{1}{p-3-1}-\frac{1}{p-3+1}=\frac{1}{p-4}-\frac{1}{p-2}$

$n=p-2 \qquad \frac{1}{p-2-1}-\frac{1}{p-2+1}=\frac{1}{p-3}-\frac{1}{p-1}$

$n=p-1 \qquad \frac{1}{p-1-1}-\frac{1}{p-1+1}=\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}$

$n=p \qquad \frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}$

$$\frac{2}{n^2-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)=\frac{3}{2}-2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

Donc la série converge vers $S=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_k\right)=\frac{3}{2}$