Corrigé Exercice 5

$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. on a : $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n^2+n}$ et $\dfrac{1}{n^2+n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente en vertu du théorème de Riemann. Il est immédiat de vérifier que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

On obtient successivement : $S_1 = u_1 = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $S_2 = u_1 + u_2 = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ et de même en observant les groupements de termes qui s'annulent , on obtient :

$$S_2 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots u_{n-1} + u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Par définition de la somme d'une série , on a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.