

Corrigé Exercice 7

1. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$ diverge car $\sum_{n=0}^p 2^n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^p = \frac{1-2^{p+1}}{1-2} = 2^{p+1} - 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p 2^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = \lim_{p \rightarrow +\infty} (2^{p+1} - 1) = +\infty.$$

2. la série $\sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de 1^{er} terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$

et on a : $\sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 2 \left(1 - (1/2)^{n+1} \right)$, la série converge puisque :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - (1/2)^{n+1} \right) = 2 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0 \quad (q = \frac{1}{2} < 1)$$

La série de terme général $\left(\frac{1}{2} \right)^n$ converge, on écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} = 2$.

3. On considère la série de terme général $\frac{1}{n^2 + 1}$; on a : $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$ pour tout n ; or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (comme série de Riemann avec $\alpha = 2$), donc la série de terme général $\frac{1}{n^2 + 1}$ converge.

En admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2 + 1} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$, on peut dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2 + 1}$ est une série convergente.

On peut aussi utiliser le théorème d'équivalence : On directement :

$\frac{3}{n^2 + 1} \sim \frac{3}{n^2}$, la série de terme général $\frac{3}{n^2}$ est convergente donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n^2 + 1}$ est une série convergente.

4. On considère la série positive $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ de terme général $U_n = \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right)^2}$

On a : $n^2 U_n = \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{n^2}{4n^2 + 4n + 1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 U_n = \frac{1}{4}$, par conséquent, la règle de Riemann

s'appliquant aux séries à terme positifs permet d'affirmer que la série converge.

Quand n tend vers l'infini, u_n est un équivalent de $\frac{1}{4n^2}$, on reconnaît le terme général d'une série de

Riemann qui avec $\alpha = 2 > 1$ est une série qui converge, donc la série de terme général u_n converge aussi d'après le théorème d'équivalence des séries positives.

5. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ répond au critère d'une série alternée :

La suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (on a pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $v_{n+1} \leq v_n$ ou $(|u_{n+1}| \leq |u_n|) (x \mapsto \frac{1}{x})$)

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Cette série est appelée la **série harmonique alternée**

6.1a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème

spécial de convergence des séries alternées s'applique. En effet, pour tout n entier naturel on a :

$$|u_{n+1}| = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} = |u_n|. \text{ Ainsi, la suite définie par } |u_n| = \frac{1}{2n+1} \text{ est décroissante}$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est convergente

7. Etudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. On reconnaît une série alternée, et ici le théorème spécial de convergence des séries alternées s'applique.

$$\text{En effet, pour tout } n \text{ entier naturel on a : } |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \quad |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{n^2} = |u_n|.$$

Ainsi, la suite définie par $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ est convergente.

$$8. 0 < \frac{n^2}{2^n + n} < \frac{n^2}{2^n} = v_n$$

Etudions la convergence de la série de terme général v_n en utilisant la règle d'Alembert

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1} + n+1}}{\frac{n^2}{2^n + n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \quad \text{donc la série de terme général } v_n \text{ est convergente. D'après le théorème de}$$

comparaison sur les séries à termes positifs, la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{2^n + n}$ est convergente également.