Corrigé Exercice 8

1. soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$; pour tout $n > 0$ $|u_n| = \left|\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (théorème de Riemann), donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ converge (critère de comparaison

   La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente , $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ est convergente .

2. Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$. Pour tout $n > 0$, on a : $0 \leq \frac{\arctan n}{n^2} < \frac{\pi}{2n^2}$, donc $0 \leq u_n < \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2}$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (théorème de Riemann)donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$ est convergente.

3. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. On obtient $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{(n+1)!}\right) / \left(\frac{n+1}{n!}\right) = \frac{n+2}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$, donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, $0 < 1$

   Donc d'après la règle d'Alembert , la série $\sum \frac{n+1}{n!}$ est convergente

4. On a : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-2}$, $u_n - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n-2} - \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{n\sqrt{n} - n\sqrt{n} + 2\sqrt{n}}{n(n+1)} = \frac{2\sqrt{n}}{n(n+1)}$, cette expression est positive pour tout $n > 2$. On a donc $u_n > \frac{\sqrt{n}}{n}$ ou $u_n > \frac{1}{n^{1/2}}$. La série de terme général $\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (comme série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$), on déduit donc que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente .on peut aussi la règle d'équivalence : $\frac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n}$ donc $\frac{\sqrt{n}}{n-2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ la conclusion vient de manière immédiate : la série de terme général $\frac{\sqrt{n}}{n-2}$ est divergente.