b) En déduire de la question précédente que $E(P) = \mathcal{L}[e(t)] = \dfrac{e^{-2P} - e^{-P}}{P}$

c) Déterminer la réponse du filtre (s) si à l'entrée de ce filtre on applique le signal e(t) représenté graphiquement comme ci-dessus.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f défini par :

$f(e_1)=3e_1 - e_2 + 3e_3$; $f(e_1+2e_2+e_3) = 3e_2 - e_3$; $f(e_1+e_3) = 2e_1 - e_2 + 3e_3$

On note A la matrice associée à f dans la B.

1- Montrer que ${}^tA = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

(N.B) Toute matrice plaquée ne sera pas prise en compte.

2- On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est

$G = A - 2I$ où $I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer G et vérifier que g n'est pas un automorphisme.
b) Déterminer le noyau Kerg et l'image Img de g.

3- on considère les vecteurs suivants :

$v_1 = (1,1,1)$; $v_2 = (0,1,-1)$; $v_3 = (1,1,0)$ tel que $f(v_3) = 2v_3 - v_2$

a) Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
b) Déterminer $f(v_1)$, $f(v_2)$ en fonction de v_1, v_2, v_3.
c) En déduire des valeurs propres de f et donner la matrice T de f dans la base B′.

4-

a) si λ est une valeur propre de f associé au vecteur u, montrer par récurrence sur k, que λ^k est valeur propre de $f^k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$, associé à u.

b) On note P la matrice de passage de B à B′ et soit $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer P.Q.