

Exercice 2

$$1^\circ. (S) \begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) & (E_1) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - 1 & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} x''(t) = x'(t) - 2y'(t) & (E_1) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - 1 & (E_2) \end{cases}$$

$$x''(t) = x'(t) - 2y'(t) = x'(t) - 2(x(t) - y(t) - 1) = x'(t) - 2x(t) + 2y(t) + 2$$

$$\text{On a : } 2y(t) = -x'(t) + x(t) \text{ d'où } x''(t) = x'(t) - 2y'(t) = x'(t) - 2x(t) - x'(t) + x(t) + 2 = -2x(t) + 2$$

$$x''(t) + 2x(t) = 2$$

2°. $x''(t) + 2x(t) = 0$ a pour solution $x_H(t) = A \cos t + B \sin t$ et $x_p(t) = 2$ est une solution évidente de

$$\text{L'équation (E) d'où } x(t) = A \cos t + B \sin t + 2.$$

$$2y(t) = -x'(t) + x(t) = A \sin t - B \cos t + 2 + A \cos t + B \sin t = (A - B) \cos t + (A + B) \sin t + 2$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(A - B) \cos t + \frac{1}{2}(A + B) \sin t + 1$$

$$3^\circ. x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 0 \text{ donne : } x(0) = A \cos 0 + B \sin 0 + 2 = A + 2 = 1, \text{ d'où } A = -1$$

$$y(0) = \frac{1}{2}(A - B) \cos 0 + \frac{1}{2}(A + B) \sin 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A - B) + 1 = 0 \Leftrightarrow A - B = -2 \Leftrightarrow -B = -2 - A = -1 \Leftrightarrow B = 1$$

$$\text{donc } B = -1 \text{ et on a enfin } x(t) = -\cos t + \sin t + 2 \text{ et } y(t) = 1 - \cos t$$

4°. la fonction $t \mapsto x(t) = 2 - \cos t + \sin t$ avec $t \in [0; 2\pi]$, comme somme de fonctions continue et

dérivables sur cet intervalle. $x(0) = 1$ et $x(2\pi) = 1$. de plus g est périodique de période 2π

$$x(t + 2\pi) = 2 - \cos(t + 2\pi) + \sin(t + 2\pi) = 2 - \cos(t) + \sin(t) = x(t). \quad x'(t) = \cos t + \sin t$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos t + \sin \frac{\pi}{4} \sin t \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t \right) = \cos t + \sin t = x'(t).$$

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou} \\ t - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou} \\ t = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou} \\ t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} . \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou} \\ \left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou} \\ t = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou} \\ t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} .$$

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \geq \cos \frac{\pi}{2} \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \\ t \in [0; \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{3\pi}{4} \\ t \in [0; \pi] \end{cases} . \text{ La fonction cosinus est}$$

décroissante sur

l'intervalle $[0; \pi]$

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \geq \cos \frac{3\pi}{2} \\ t \in [\pi; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - \frac{\pi}{4} \geq \frac{3\pi}{2} \\ t \in [\pi; 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{7\pi}{4} \\ t \in [\pi; 2\pi] \end{cases} . \text{ La fonction cosinus est}$$

croissante

sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$.

t	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	
$x'(t)$	+	0	-	0	+
$x(t)$	1	$2+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	1	

Etude de la fonction $y : y(t) = 1 - \cos t$ avec $t \in [0; \pi]$

la fonction $t \mapsto y(t) = 1 - \cos t$ avec $t \in [0; 2\pi]$, comme somme de fonctions continue et dérivables

sur cet intervalle . $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$. de plus y est paire et périodique de période 2π .

$$y'(t) = \sin t .$$

La fonction $t \mapsto \sin t$ est une fonction élémentaire, son signe est connu sur $[0; 2\pi]$.

t	0	π	2π	
$y'(t)$		+	0	-
$y(t)$	1	2	1	

t	0	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{4}$	2π			
$x'(t)$	1	+	0	1	-	0	+	1
$x(t)$	1	$2+\sqrt{2}$	3	$2-\sqrt{2}$	1			
$y'(t)$	0	+	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-	0
$y(t)$	0	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0			

On sait que qu'un vecteur directeur de la tangente en un point régulier de paramètre t_0 est le vecteur non nul

$\vec{u} = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$, dans un repère orthogonal .L'examen du tableau de variation montre qu'au point

$A(1;0)$: $x'(0)=1$ et $y'(0)=0$, donc on a : $\vec{u} = \vec{i}$ et la tangente qu'au point $A(1;0)$ est parallèle à l'axe de

l'axe des abscisses .

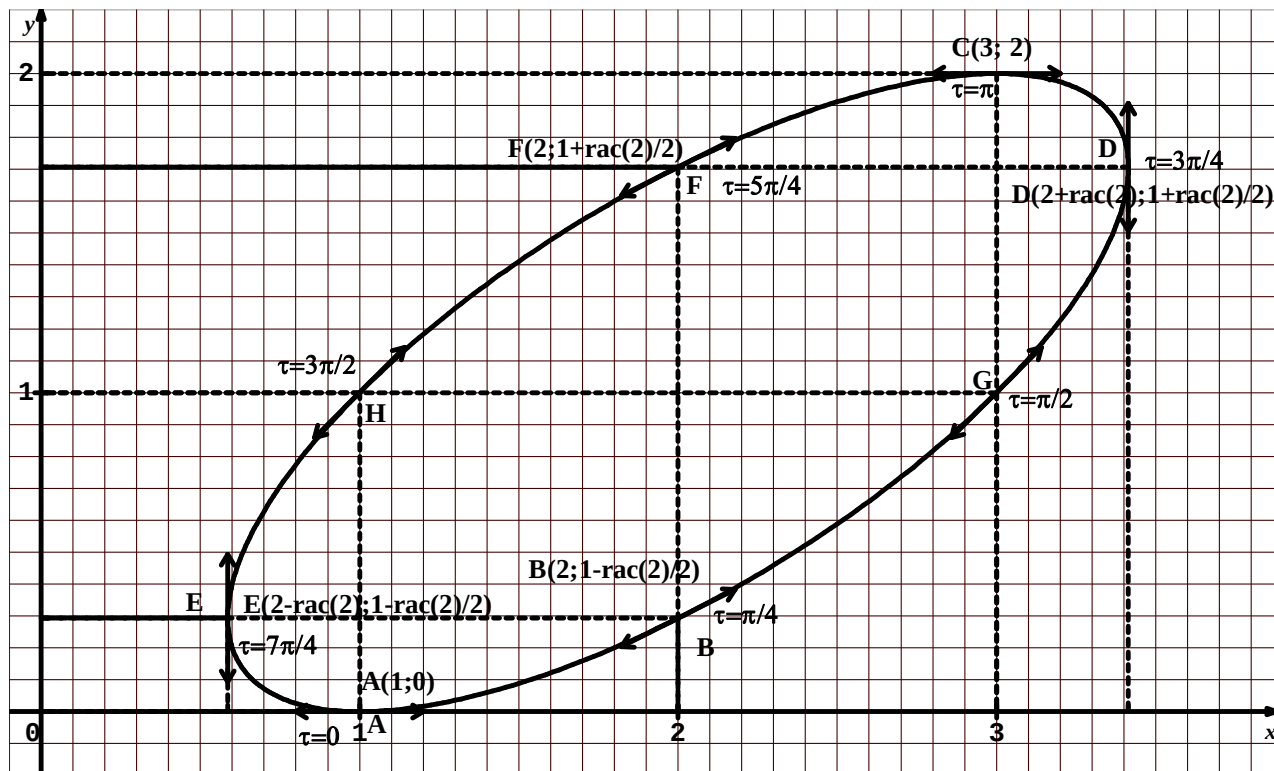
Au point $C(3;2)$: $x'(\pi)=1$ et $y'(\pi)=0$, donc on a : $\vec{u} = \vec{i}$ et la tangente qu'au point $C(3;2)$ est parallèle

à l'axe des abscisses

Au point $D(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}/2)$: $x'(3\pi/4)=0$ et $y'(3\pi/4)=\sqrt{2}/2$, donc on a : $\vec{u} = \sqrt{2}/2\vec{j}$ et la tangente qu'au point $D(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2}/2)$ est parallèle à l'axe des ordonnées .

Au point $E(2-\sqrt{2};1-\sqrt{2}/2)$: $x'(7\pi/4)=0$ et $y'(7\pi/4)=-\sqrt{2}/2$, donc on a : $\vec{u} = -\sqrt{2}/2\vec{j}$ et la tangente

qu'au point $E(2-\sqrt{2};1-\sqrt{2}/2)$ est parallèle à l'axe des ordonnées .



Au point $F\left(2;1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $x'(5\pi/4)=-\sqrt{2}$ et $y'(5\pi/4)=-\sqrt{2}/2$, donc on a : $\vec{u}=-\sqrt{2}\vec{i}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}$
et le

vecteur tangent au point $F\left(2;1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Au point $B\left(2;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $x'(\pi/4)=\sqrt{2}$ et $y'(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, donc on a : $\vec{u}=\sqrt{2}\vec{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}$ et le
vecteur

tangent au point $B\left(2;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$